Bachelor of Science, International Physics Studies Program (Honours)

Akademischer Grad	**Modulnummer**	**Modulform**
Master of Science	10-PHY-BIMA4	***Wahlpflicht***
Modultitel	Mathematics 4 – Additional Topics in Analysis	
Sprache	Englisch	
Empfohlen für:	5./6./7./8. Semester	
Verantwortlich	Professur für Mathematische Optimierung (Dr. Timofei Shilkin)	
Dauer	1 Semester	
Modulturnus	Sommersemester 2025	
Lehrformen	- Vorlesung „Mathematics 4 - Elements of Functional and Harmonic Analysis“ (4 SWS) = 60 h Präsenzzeit und 120 h Selbststudium = 180 h - Seminar „Mathematics 4 - - Elements of Functional and Harmonic Analysis“ (2 SWS) = 30 h Präsenzzeit und 90 h Selbststudium = 120 h	
Arbeitsaufwand	10 LP = 300 h (Workload)	
Verwendbarkeit	B. Sc. International Physics Studies Program B. Sc. International Physics Studies Program (Honours)	
Qualifikationsziele	Nach Abschluss des Moduls können Studierende: • Lebesgue-Maß und -Integral theoretisch und praktisch anwenden • Eigenschaften von Hilberträumen und linearen Operatoren verstehen • Fourier-Analyse in verschiedenen Funktionenräumen durchführen • Distributionen und deren Transformationen berechnen Sie entwickeln fortgeschrittene mathematische Kompetenzen in Analysis, Funktionalanalysis und Harmonischer Analysis. Sie sind in der Lage, die erworbenen Kenntnisse auf typische Problemstellungen anzuwenden, diese selbständig zu lösen und ihr Vorgehen zu begründen bzw. zu beweisen.	
Inhalt	Following Mathematics 1 – 3, this elective module introduces into specialized topics of higher mathematics relevant in physics. It also includes practical training how to create proofs, to read specialized literature and work on problem solutions. The module is only recommended to students who want to specialize in that field and requires an active participation in the classes. **1. Lebesgue measure and Lebesgue integral** Lebesgue measure in R^n. Measurable functions. Lebesgue integral. Change of variables. Fubini's theorem. Dominated convergence theorem and Fatou's lemma. The Hölder and Minkowski inequalities. Lebesgue spaces. **2. Elements of the functional analysis and the operator theory** Banach spaces. Completeness and separability. Hilbert spaces. Linear operators. Bounded operators. Uniform boundedness principle. Closed graph and open map theorems. Linear functionals. Hahn-Banach theorem. Dual space. Weak and weak-* convergence. Weak compactness of bounded sets in a Hilbert space. Compact and adjoint operators in Hilbert spaces. Spectrum of a linear operator. Bounded self-adjoint operators. Hilbert-Schmidt theorem. *Possible additional topics:* Spectral theorem for unbounded self-adjoint operators. Discrete and continuous spectrum of a self-adjoint operator. Heisenberg's uncertainty principle. Stone's theorem on one-parameter unitary groups. **3. Elements of harmonic analysis** Trigonometric Fourier series. Riemann lemma. Dirichlet kernel. Pointwise and uniform convergence of Fourier series. Completeness of trigonometrical polynomials in L_2. Fourier transform on L_1. Properties of the Fourier transform.	

	Schwartz space. Inverse Fourier transform. Parseval's identity. Fourier transform on L_2. Fourier transform of a convolution. **4. Distributions** Definition and examples of distributions. Derivatives of a distribution. Tempered distributions. Convolution of a distribution with a test function. Fourier transform of a tempered distribution. Weak derivatives. ***Pre-exam requirement:*** At every seminar students have a short 20-minute written test on the material covered in the lectures and seminar. A successful (passed) test is awarded with one point. Admission to the final exam required at least 50% successful tests, i.e. at least 50% of all points. Students can earn extra points by solving homework problems and present them during the seminar at the blackboard. Hence, active participation in the seminars is required to achieve admission to the final exam. ## Im Anschluss an Mathematik 1 – 3 führt dieses Wahlmodul in spezielle, für die Physik relevante, Themen der höheren Mathematik ein. Es beinhaltet auch praktische Übungen zum Erstellen von Beweisen, zum Lesen von Fachliteratur und zur Erarbeitung von Problemlösungen. Das Modul wird nur Studierenden empfohlen, die sich in diesem Bereich spezialisieren möchten und erfordert eine aktive Teilnahme an den Lehrveranstaltungen. **1. Lebesgue-Maß und Lebesgue-Integral** Lebesgue-Maß in R^n. Messbare Funktionen. Lebesgue-Integral. Variablentransformation. Satz von Fubini. Satz von der dominierten Konvergenz und Lemma von Fatou. Die Hölder- und Minkowski-Ungleichungen. Lebesgue-Räume. **2. Elemente der Funktionalanalyse und der Operatortheorie** Banachräume. Vollständigkeit und Separabilität. Hilberträume. Lineare Operatoren. Beschränkte Operatoren. Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit. Satz vom abgeschlossenen Graphen und Satz von der offenen Abbildung. Lineare Funktionale. Satz von Hahn-Banach. Dualraum. Schwache und schwach-* Konvergenz. Schwache Kompaktheit beschränkter Mengen in einem Hilbertraum. Kompakte und adjungierte Operatoren in Hilberträumen. Spektrum eines linearen Operators. Beschränkte selbstadjungierte Operatoren. Satz von Hilbert-Schmidt. *Mögliche zusätzliche Themen:* Spektralsatz für unbeschränkte selbstad-jungierte Operatoren. Diskretes und kontinuierliches Spektrum eines selbstad-junkten Operators. Heisenbergs Unschärferelation. Stone's Theorem über einparametrige unitäre Gruppen. **3. Elemente der harmonischen Analysis** Trigonometrische Fourierreihen. Lemma von Riemann. Dirichlet-Kern. Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Fourierreihen. Vollständigkeit trigonometrischer Polynome in L2. Fourier-Transformation auf L1. Eigenschaften der Fourier-Transformation. Schwartz-Raum. Inverse Fourier-Transformation. Parsevalsche Gleichung. Fourier-Transformation auf L2. Fourier-Transformation einer Faltung. **4. Distributionen** Definition und Beispiele von Distributionen. Ableitungen einer Distribution. Temperierte Distributionen. Faltung einer Distribution mit einer Testfunktion. Fourier-Transformation einer temperierten Distribution. Schwache Ableitungen. ***Prüfungsvorleistung:*** In jedem Seminar müssen die Studierenden einen kurzen 20-minütigen schriftlichen Test über den in den Vorlesungen und im Seminar behandelten Stoff schreiben. Ein erfolgreicher (bestandener) Test wird mit einem Punkt bewertet. Für die Zulassung zur Abschlussprüfung sind mindestens 50% erfolgreiche Tests (d. h. mindestens 50% aller Punkte)

	erforderlich. Die Studierenden können zusätzliche Punkte sammeln, indem sie Hausaufgaben lösen und diese während des Seminars an der Tafel präsentieren. Eine aktive Teilnahme an den Seminaren ist daher Voraussetzung für die Zulassung zur Abschlussprüfung.
Teilnahmevoraus-setzungen	Abschluss der Module 10-PHY-BIMA1, -BIMA2 und -BIMA3; Noten im Bereich sehr gut bis befriedigend empfohlen
Literaturangabe	- A. Friedman. Foundations of Modern Analysis. - A. Kolmogorov, S. Fomin, Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. - L. Grafakos, Classical Fourier Analysis. - K. Yoshida, Functional Analysis. - M. Birman, M. Solomjak, Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space. - V. Vladimirov, Equations of Mathematical Physics.
Vergabe von Leis-tungspunkten	Leistungspunkte werden mit erfolgreichem Abschluss des Moduls vergeben. Näheres regelt die Prüfungsordnung.
Prüfungsleistungen und Prüfungsvorleistungen	**Modulprüfung: Klausur (120 Min.) // Written exam (120 Min.), mit Wichtung 1** *Prüfungsvorleistung:* Übungsaufgaben // *Pre-exam requirement:* Exercises