

# **Wissenschaftliche Mitteilungen**

aus dem  
**Institut für Meteorologie der Universität Leipzig**



ISBN 978-3-9811114-4-6

---

## **Akustische Tomographie zur zeitgleichen Erfassung von Temperatur- und Strömungsfeldern**

**Manuela Barth**

Leipzig 2009

**Band 44**



# Zusammenfassung

Die akustische Tomographie ist ein Verfahren, welches die Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit in Luft von den meteorologischen Größen Temperatur und Strömung entlang des Ausbreitungsweges nutzt, um aus Messungen der Laufzeit akustischer Signale bei bekannten Positionen der Sender und Empfänger auf die genannten meteorologischen Größen zu schließen. Thema der vorliegenden Arbeit ist die Erweiterung und Optimierung eines solchen akustisch tomographischen Verfahrens zur gleichzeitigen Bestimmung von Verteilungen der Temperatur und der Strömung bei gleicher räumlicher Auflösung sowie dessen Anwendung in Messgebieten mit einer Ausdehnung von wenigen Quadratmetern. Hierfür wurde zunächst ein bestehendes System zur akustischen Laufzeit-tomographie um einen Algorithmus zur tomographischen Rekonstruktion von vektoriellen Strömungsfeldern erweitert. Auf diese Weise konnte eine Angleichung der Anzahl aufgelöster Strömungsdaten innerhalb einer Messfläche an die Anzahl der ebenfalls tomographisch ermittelten Temperaturwerte erreicht werden. Anhand von Sensitivitätsstudien mit vorgegebenen Verteilungen der meteorologischen Größen in einem Gebiet wurde die Rekonstruktionsgenauigkeit des tomographischen Algorithmus analysiert. Darüber hinaus konnte gezeigt werden, dass für eine verlässliche Rekonstruktion des vektoriellen Strömungsfeldes eine gleichmäßige Anordnung der akustischen Sensoren um das gesamte Untersuchungsgebiet zwingend erforderlich ist.

Des Weiteren wurde das System hinsichtlich seiner Anwendbarkeit in Messgebieten mit einer räumlichen Ausdehnung ab wenigen Quadratmetern optimiert, ohne Einbußen bei der Genauigkeit der Temperatur- und Strömungsbestimmung verzeichnen zu müssen. Die damit verbundenen höheren Anforderungen an die Genauigkeit, insbesondere der Laufzeitbestimmung, konnten durch eine Anpassung der Hardware sowie den Einsatz spezieller breitbandiger Signale (Maximallängenfolgen) und die Anwendung von Interpolationstechniken erreicht werden.

Anhand zweier Messbeispiele wird das Potential des erweiterten und optimierten Systems zur Untersuchung der Homogenität von Messflächen und zur Detektion der räumlichen Variabilität thermisch induzierter Temperatur- und Strömungsmuster demonstriert.





# Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung.....	1
2. Eigenschaften der Schallausbreitung.....	5
2.1. Ausbreitung von Schall.....	5
2.2. Schallgeschwindigkeit in Gasen.....	8
2.2.1. Abhängigkeit von der Temperatur.....	9
2.2.2. Abhängigkeit von der Luftfeuchtigkeit.....	11
2.2.3. Abhängigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit.....	15
2.3. Brechung, Reflexion und Dämpfung akustischer Signale.....	17
2.3.1. Intensitätsmaße zur Beschreibung von Schallsignalen.....	17
2.3.2. Geometrische Dämpfung.....	18
2.3.3. Atmosphärische Absorption.....	18
2.3.4. Brechung in der Atmosphäre.....	21
2.3.5. Einfluss von Begrenzungsflächen.....	24
2.3.6. Einfluss von Turbulenz.....	26
3. Laufzeitbestimmung akustischer Signale.....	29
3.1. Korrelationsmesstechnik.....	29
3.2. Fouriertransformation.....	31
3.3. Akustische Signale.....	32
3.3.1. Harmonische Signale mit konstanter Frequenz.....	32
3.3.2. Chirpsignale.....	35
3.3.3. Pseudostochastisches Rauschen mit maximaler Periodenlänge.....	36
3.4. Berechnung der Korrelationsfunktion.....	43
3.4.1. Schnelle Fouriertransformation.....	43
3.4.2. Schnelle Hadamardtransformation.....	44
3.4.3. Vergleich des Rechenaufwandes.....	47
3.5. Rekonstruktion abgetasteter Signale.....	48
4. Tomographie zur Darstellung von Verteilungen.....	51
4.1. Anwendungsgebiete tomographischer Verfahren.....	51
4.2. Theoretische Grundlagen.....	53
4.3. Methoden I: Projection-Slice-Theorem und Fourier-Transform-Methoden.....	55
4.4. Methoden II: Algebraische Methoden.....	59

4.4.1. Grundlagen .....	59
4.4.2. Konvergenzeigenschaften.....	62
4.4.3. Rekonstruktionsalgorithmen.....	64
4.4.4. Genauigkeitsbetrachtungen .....	67
5. Akustische Laufzeittomographie .....	71
5.1.1. Trennung von Temperatur und Strömungseinfluss .....	72
5.1.2. Rekonstruktion von Temperaturfeldern.....	72
5.1.3. Rekonstruktion von Strömungsfeldern.....	79
6. Messtechnik für akustische Laufzeittomographie .....	89
6.1. Hardware .....	90
6.1.1. Akustische Messkarte .....	91
6.1.2. Lautsprecher .....	92
6.1.3. Mikrophone .....	97
6.2. Software .....	99
6.2.1. Schallsignale .....	100
6.2.2. Laufzeitbestimmung .....	102
6.3. Genauigkeitsgrenzen.....	104
6.4. Beispiel einer Laufzeitmessung .....	107
7. Experimentelle Umsetzung.....	111
7.1. Atmosphären-Simulationskammer SAPHIR .....	111
7.1.1. Hintergrund der Messung .....	112
7.1.2. Messtechnik .....	113
7.1.3. Ergebnisse der Messungen - Temperaturverteilung .....	115
7.1.4. Charakterisierung der räumlichen Temperaturvariabilität .....	123
7.2. Ilmenauer Fass .....	124
7.2.1. Hintergrund der Messung .....	125
7.2.2. Messtechnik.....	127
7.2.3. Strömungsrekonstruktion: Simulationsergebnisse .....	129
7.2.4. Ergebnisse der Messung – Temperatur- und Strömungsverteilung.....	131
7.2.5. Charakterisierung der räumlichen Struktur der Konvektion .....	138
8. Schluss.....	141
Literatur.....	145
Wichtige Formelzeichen und Symbole .....	156
Konstanten und Stoffeigenschaften.....	161

Abkürzungen .....	163
Anhang A – Berechnung der Permutationsmatrizen zur Durchführung der FHT.....	165
Anhang B – Rekonstruktion simulierter Vektorfelder .....	167
Anhang C – Simulation eines akustischen Dipols.....	173



# 1. Einleitung

Die Untersuchung eines Messobjektes ohne dieses durch das Einbringen von Sensoren zu beeinflussen, ist eine wichtige Methodik in vielen wissenschaftlichen Gebieten. Tomographische Techniken bieten diese Möglichkeit: Die Bestimmung mehrdimensionaler Verteilungen von Größen innerhalb eines Messgebietes. Beruhend auf den Arbeiten von Radon (1917) sind diese Verfahren heute insbesondere von medizinischen Anwendungen bekannt. Sie werden genutzt, um aus einer Kombination von Messungen entlang verschiedener Wege durch das Untersuchungsgebiet Schnittbilder durch das Objekt zu berechnen (Natterer, 2001). Voraussetzung für die Rekonstruktion der Verteilungen ist die Analyse einer Sondierungsenergie, welche mit den Eigenschaften innerhalb des Messgebietes in Wechselwirkung tritt und deren Charakteristika (z. B. Intensität des ausgesendeten Signals oder dessen Geschwindigkeit) beim Durchlaufen verändert werden.

Derartige Modifikationen erfahren zum Beispiel akustische Signale bei ihrer Ausbreitung in Luft. Maßgeblichen Einfluss auf die Schallgeschwindigkeit in der Atmosphäre haben dabei die Größen Temperatur und Strömung entlang des Schalllaufweges (Pierce, 1994; Ostashev, 1997). Beruhend auf dieser Abhängigkeit wurden bereits Mitte des 20. Jahrhunderts Messverfahren entwickelt, mit deren Hilfe eine lokale Bestimmung des horizontalen Windes (Schotland, 1955) bzw. der Temperatur (Barrett und Suomi, 1949) aus akustischen Messungen erfolgte. Ein Gerät zur gleichzeitigen Erfassung von Temperatur und Strömung entlang einer Messstrecke von 1 m Länge beschreiben Kaimal und Businger in ihren Arbeiten von 1963 (1963a; 1963b). Weiterentwicklungen der Methodik von zum Beispiel Hanafusa et al. (1982) haben dazu geführt, dass sich diese sogenannten akustischen Anemometer bis heute als Standardgeräte für mikrometeorologische Untersuchungen etabliert haben. Mit ihrer Hilfe kann der zwei- bzw. dreidimensionale Windvektor sowie die Temperatur aus Messungen der Schalllaufzeit in einem kleinen Volumen von wenigen Zentimetern Kantenlänge mit hoher zeitlicher Auflösung bestimmt werden (Foken, 2003).

Auf einem ähnlichen Verfahren, der Laufzeitmessung akustischer Signale zwischen einem Schallsender und einem Empfänger, beruht das Verfahren der akustischen Laufzeittomographie. Durch die Kombination von Messungen entlang verschiedener Wege innerhalb eines Untersuchungsgebietes und der Anwendung tomographischer Techniken ist es möglich, gleichzeitig Rückschlüsse auf die räumlichen Verteilungen der meteorologischen Größen Temperatur und Strömung im Untersuchungsgebiet zu ziehen. Ein derartiger Zugang zu den genannten Größen in ihrer räumlichen Verteilung kann bisher mit keinem anderen bekannten Messverfahren erreicht werden.

Ein wesentlicher Vorteil dieser Methode ist, dass Informationen zur räumlichen Struktur von Temperatur und Strömung im Messgebiet gewonnen werden können, ohne Störungen der Felder durch das Einbringen von Sensoren zu verursachen. Im Vergleich zu konventionellen Punktmessungen bietet das Verfahren weiterhin den Vorteil, dass es die meteorolo-

gischen Parameter ohne Trägheit der Sensoren sowie ohne Beeinflussung durch solare Strahlung erfasst. Die Bereitstellung von Flächen- bzw. Volumenmittelwerten als Untergliederung der Messfläche, welche konsistent mit atmosphärischen Simulationsmodellen sind, ist ein weiterer Vorteil der Methode (Wilson et al., 2001).

Erste theoretische Ansätze für eine akustische Laufzeittomographie zur Sondierung horizontaler Temperatur- und Strömungsfelder in der Atmosphäre finden sich in der Arbeit von Spiesberger und Fristrup (1990). Schwerpunkt ihrer Untersuchungen war die Lokalisierung natürlicher Schallquellen mit Hilfe von Laufzeitmessungen akustischer Signale. Es konnte gezeigt werden, dass sich die Genauigkeit der Positionsbestimmung deutlich erhöhte, wenn die Abhängigkeiten der Schallgeschwindigkeit von Temperatur und Strömung innerhalb der Messfläche bei der Analyse der gemessenen Daten berücksichtigt wurde (siehe auch Spiesberger, 1999).

Eine Machbarkeitsstudie zur Anwendung der akustischen Laufzeittomographie zur Sondierung der atmosphärischen Grenzschicht wurde von Wilson und Thomson (1994) erstellt. Im Gegensatz zu den Arbeiten von Spiesberger und Fristrup (1990) und Spiesberger (1999) wurden aktive Schallquellen zur Signalerzeugung im Hörschallbereich (Frequenzbereich zwischen 20 Hz und 20 kHz) vorgesehen, deren Positionen a priori bekannt waren.

Weitere theoretische Untersuchungen, die experimentelle Umsetzung der akustischen Laufzeittomographie zur Bestimmung der horizontalen Verteilung meteorologischer Größen in wenigen Metern über Grund, sowie zahlreiche Anwendungen eines solchen Messsystems mit aktiver Schallaussendung beschreiben Wissenschaftler der Universität Leipzig in ihren Arbeiten (z. B. Arnold, 2000; Ziemann, 2000). Neben Vergleichsmessungen zwischen konventionellen in-situ Messverfahren (Punktmessungen) und der akustischen Laufzeittomographie (z. B. Arnold et al., 2001; Ziemann et al., 2002), wurde das akustisch tomographische Verfahren zur Untersuchung von Messflächen hinsichtlich ihrer Homogenität bzw. zur Ableitung turbulenter Wärmeströme, welche durch horizontale Temperaturgradienten angetrieben werden, eingesetzt (Raabe et al., 2002).

Die Bestimmung der Temperaturverteilung innerhalb der Messfläche erfolgte in den genannten Arbeiten unter Verwendung eines tomographischen Algorithmus, wobei die Messfläche in Teilflächen mit einer Ausdehnung zwischen  $50\text{ m} \times 50\text{ m}$  und  $100\text{ m} \times 100\text{ m}$  untergliedert wurde. Eine Analyse der Struktur des Windfeldes erfolgte anhand des Flächenmittelwertes der Strömung (Ziemann et al., 1999) oder der Strömungseigenschaften entlang einzelner Schallwege (Raabe et al., 2001). Erste Ansätze zur Berechnung von Zellenwerten für die Windgeschwindigkeit wurden von Arnold et al. (2004) bzw. Raabe et al. (2005) vorgestellt. Die Bestimmung der Windwerte für die Teilgebiete erfolgte aus geometrischen Betrachtungen und lag in den genannten Beispielen mit insgesamt neun Einzelwerten deutlich unter der Anzahl der Temperaturwerte (32 bzw. 35) innerhalb der Messfläche.

Ein Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist es daher zunächst, die Anzahl der aus den Laufzeiten gewonnen Teilflächen zur Repräsentation der Strömungsverteilung an die Anzahl der Temperaturdaten innerhalb der Messfläche anzugleichen. Um dies zu erreichen, wird

eine Erweiterung der Analysesoftware angestrebt, so dass die Verteilung der Strömung innerhalb der Untersuchungsfläche analog zur Temperaturverteilung mit Hilfe eines tomographischen Algorithmus berechnet werden kann.

Bei bisherigen Anwendungen des akustischen Tomographiemesssystems betrug die räumliche Ausdehnung der Messflächen zwischen minimal  $120\text{ m} \times 200\text{ m}$  (Ziemann et al., 2001; Tetzlaff et al., 2002) und maximal  $300\text{ m} \times 700\text{ m}$  (Arnold et al., 2004). Eine räumliche Begrenzung der Messflächengröße stellen die Schallausbreitungseigenschaften einerseits und die Anforderungen an die Genauigkeit des Messsystems zur Bestimmung von Temperatur und Strömung andererseits dar. Je kürzer eine Schallstrecke ist, umso exakter muss die Schallgeschwindigkeit und somit die Positions- und Laufzeitbestimmung erfolgen, um gleiche Unsicherheiten bei Temperatur- und Strömungsbestimmung zu garantieren. Bei Streckenlängen über  $200\text{ m}$  kann entsprechend Ziemann et al. (1999) mit dem entwickelten System eine Genauigkeit bei der Bestimmung der Temperatur von unter  $0,5\text{ K}$  und der Strömungsgeschwindigkeit von unter  $0,5\text{ m s}^{-1}$  erreicht werden. Der Zugang zu Messflächen mit geringerer räumlicher Ausdehnung bleibt bei entsprechenden Anforderungen an die Genauigkeit zur Messung von Temperatur und Strömung mit diesem System allerdings versagt.

Als weiterer Schwerpunkt der Arbeit soll daher nach Möglichkeiten gesucht werden, welche eine Unterteilung der Messfläche in Teilflächen mit geringerer räumlicher Ausdehnung und damit die Untersuchung kleinerer räumlicher Strukturen ermöglicht. Dies kann zum einen durch eine Erhöhung der Messstreckenzahl erfolgen, dass heißt durch den Einsatz einer größeren Zahl an Schallsendern und Empfängern. Zum anderen führt eine Verkleinerung der Messfläche bis hin zu wenigen Quadratmetern bei gleich bleibender Zahl an Untergliederungen zu einer Reduktion der Teilflächengröße. Um die Genauigkeitsanforderungen an das akustisch tomographische System für die Temperatur- und Strömungsgeschwindigkeiten ( $\leq 0,5\text{ K}$  und  $0,5\text{ m s}^{-1}$ ) in diesem Fall beizubehalten, ist es nötig, deutliche Verbesserungen bei der Genauigkeit der Schallgeschwindigkeitsmessungen zu finden. Diese Anforderung beinhaltet sowohl eine Optimierung hinsichtlich der Positionsbestimmung von Schallsendern und Empfängern als auch eine erhebliche Erhöhung bei der Genauigkeit der Laufzeitbestimmung. Dieser zweite Arbeitsschwerpunkt soll es ermöglichen, das Verfahren für Messaufgaben in Raumbereichen einzusetzen, welche für die akustische Laufzeitomographie bisher nicht zugänglich waren.





## 2. Eigenschaften der Schallausbreitung

Die Ausbreitung von Schall erfolgt in Form longitudinaler Wellen durch ein kompressibles Medium. Die theoretischen Hintergründe zur Ausbreitung des Schalls sollen in Kapitel 2.1 skizziert werden. Ausführliche Herleitungen zur Schallausbreitung sowie zur Beschreibung von Schallwellen geben z. B. Pierce (1994) und Kuttruff (2004).

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit akustischer Signale wird durch die Eigenschaften des Mediums bestimmt. In der Atmosphäre beeinflussen vor allem Temperatur, Feuchtegehalt und Strömung die Geschwindigkeit, mit der sich akustische Signale ausbreiten. Im Kapitel 2.2 wird der Zusammenhang zwischen diesen Größen und der Schallgeschwindigkeit in Luft erläutert.

Neben den Einflüssen auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit wirken sich meteorologische Parameter auch auf andere Faktoren der Schallausbreitung aus. Hierzu zählen Gradienten der Lufttemperatur und Windgeschwindigkeit, welche zu einer Brechung der Schallwellen und damit zu einer Richtungsänderung der Signale führen. Des Weiteren werden akustische Signale durch Dämpfungsprozesse in der Atmosphäre bei ihrer Ausbreitung modifiziert. Diese Faktoren werden im Abschnitt 2.3 zusammengefasst und erläutert.

### 2.1. Ausbreitung von Schall

Schall breitet sich in Form kleiner Schwingungen aus, welche ein periodisches Verdichten bzw. Verdünnen der Luftmoleküle bewirken. Das Fortschreiten einer solchen Schwingung wird als Schallwelle bezeichnet. Die Schwankungen von Druck und Dichte bei der Schallausbreitung sind dabei klein im Vergleich zu den entsprechenden statistischen, im Mittel in der Atmosphäre vorherrschenden Werten. Der Gesamtluftdruck  $p$  (analog die Luftdichte  $\rho$ ) kann daher als Summe aus einem mittleren atmosphärischen Druck  $p_0$  (einer mittleren Dichte  $\rho_0$ ) und einer Abweichung  $p'$  (Dichteabweichung  $\rho'$ ), hervorgerufen durch die Schallwelle, beschrieben werden

$$p = p_0 + p' \quad \text{bzw.} \quad \rho = \rho_0 + \rho' \quad \text{mit} \quad p' \ll p_0 \quad \text{bzw.} \quad \rho' \ll \rho_0. \quad (2.1)$$

Die Parameter  $p'$  und  $\rho'$  werden als Schalldruck bzw. Wechseldichte bezeichnet und charakterisieren die Schallausbreitung. Eine weitere Größe zur Beschreibung der Schallausbreitung ist die Schallschnelle  $\mathbf{v}_w$ . Sie gibt an, mit welcher Geschwindigkeit die Auslenkung der einzelnen Teilchen beim Voranschreiten der Schallwelle erfolgt.

Zur Beschreibung der Schallausbreitung werden in der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad \text{mit} \quad \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2.2)$$

die Werte des Druckes und der Dichte durch deren Zerlegung in Mittelwert und Abweichung nach Gleichung (2.1) sowie die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  durch die Schallschnelle ersetzt (Landau und Lifschitz, 1991; Pierce, 1994).

Unter Annahme kleiner Abweichungen vom Mittelwert kann diese Gleichung linearisiert werden, d.h. Produkte von Störungstermen (Terme höherer Ordnung) werden vernachlässigt. Hierbei wird vorausgesetzt, dass die Teilchenschwingungen bei der Schallausbreitung (Schallschnelle  $\mathbf{v}_w$ ) im Vergleich zur Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  des Schalles im Medium gering sind ( $|\mathbf{v}_w| \ll c$ ).

Unter diesen Bedingungen nimmt die linearisierte Kontinuitätsgleichung für die Schallausbreitung folgende Form an

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_w. \quad (2.3)$$

Aus der eulerschen Gleichung

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (2.4)$$

ergibt sich durch Linearisierung folgende Beziehung

$$\frac{\partial \mathbf{v}_w}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p' = 0. \quad (2.5)$$

Um die Wellengleichung für die Druck- bzw. Dichtestörung zu erhalten, wird durch Kombination der Gleichungen (2.3) und (2.5) zunächst die Geschwindigkeitsabhängigkeit eliminiert

$$\nabla^2 p' - \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = 0. \quad (2.6)$$

Weiterhin wird ausgenutzt, dass die Schallausbreitung in einem idealen Gas adiabatisch erfolgt (Laplace, 1816), d.h. dass während der Schallausbreitung keine Wärme mit der Umgebung ausgetauscht wird. Da Luft unter atmosphärischen Bedingungen als ideales Gas betrachtet werden kann (s. z.B. Pichler, 1997), dient dieser Zusammenhang dazu, die unbekanntes Größen  $p'$  bzw.  $\rho'$  in Gleichung (2.6) zu ersetzen. Die Beziehung zwischen diesen Größen ist gegeben durch (Landau und Lifschitz, 1991; Pierce, 1994)

$$p' = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho_0} \right)_s \rho' \equiv c^2 \rho' \quad \text{mit} \quad c^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho_0} \right)_s. \quad (2.7)$$

Der Index  $s$  bezeichnet in dieser Gleichung die Entropie, die bei reversiblen Vorgängen ohne Wärmeaustausch (isentropen Vorgänge) erhalten bleibt und  $c$  beschreibt die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schallwelle.

Setzt man diese Beziehung für  $p'$  ein, erhält man die Wellengleichung für die Dichtestörung  $p'$

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \Delta p' = 0, \text{ wobei } \Delta = \nabla^2 \quad (2.8)$$

den Laplace-Operator beschreibt. Die Wellengleichung für die Dichtestörung lässt sich in ähnlicher Weise herleiten.

Eine einfach zu beschreibende Lösung von Gleichung (2.8) ist eine ebene Welle, welche sich durch geradlinige Ausbreitung mit räumlich konstanter Amplitude auszeichnet. In diesem Fall sind sämtliche Größen Funktionen  $F_1$  bzw.  $F_2$  der Zeit  $t$  und einer Raumkoordinate (z. B. der horizontalen Koordinate  $x$ ) (Landau und Lifschitz, 1991)

$$p' = F_1(x - ct) + F_2(x + ct). \quad (2.9)$$

$F_1$  beschreibt Wellen, welche sich in positiver  $x$ -Richtung ausbreiten, während  $F_2$  Wellen beschreibt, die sich in negative  $x$ -Richtung ausbreiten. Für harmonische monochromatische Wellen (Wellen konstanter Frequenz) kann als Lösungsansatz für die Wellengleichung geschrieben werden

$$p' = p_{pk} \cos[\omega t - k_x x - \varphi] = \text{Re}\left\{ \underline{p}_{pk} e^{i[\omega t - k_x x - \varphi]} \right\}. \quad (2.10)$$

Hierbei entspricht  $p_{pk}$  der Amplitude der Welle ( $\underline{p}_{pk}$  der komplexwertigen Amplitude),  $\varphi$  der Phase und  $\omega$  der Kreisfrequenz der Welle, welche mit der Frequenz  $f$  des Signals verknüpft ist durch

$$\omega = 2\pi f. \quad (2.11)$$

Die Größe  $k_x$  wird als Wellenzahl bezeichnet und kann aus Kreisfrequenz und Schallgeschwindigkeit berechnet werden

$$k = \frac{\omega}{c}. \quad (2.12)$$

Da es sich bei Gleichung (2.8) um eine lineare, homogene Differentialgleichung handelt, stellen beliebige Linearkombination von Lösungen der Wellengleichung weitere Lösungen der Wellengleichung dar.

Für den Fall, dass die Wellenlänge  $\lambda$  sehr viel kleiner ist als die charakteristische Längenskala des betrachteten Mediums (Grenzfall kleiner Wellenlängen,  $\lambda \rightarrow 0$ , Hochfrequenzapproximation) kann die Beschreibung der Schallausbreitung durch die Einführung von Schallstrahlen veranschaulicht werden. Diese sind als Linien definiert, deren Tangenten in jedem Punkt mit der Ausbreitungsrichtung der Welle übereinstimmen (Landau und Lifschitz, 1991). Eine solche Betrachtungsweise wird als geometrische Akustik bezeichnet (Kuttruff, 2004). Sie bietet gegenüber der Analyse von Wellen einige Vorteile (Boone und Vermaas, 1991): die Ausbreitung des Schalls lässt sich mit Hilfe von Schallstrahlen sehr

viel leichter veranschaulichen; Eigenschaften wie Reflexion und Brechung lassen sich gut wiedergeben und darstellen. Als Nachteil ist zu nennen, dass mit der geometrischen Akustik Prozesse wie Beugung und Interferenzen nicht beschreibbar sind.

Als Bedingung für die Anwendbarkeit der geometrischen Akustik (Schallstrahlapproximation) in einer bewegten Atmosphäre geben Boone und Vermaas (1991) an, dass sich die Schallgeschwindigkeit  $c$  und die Strömungsgeschwindigkeit (Windgeschwindigkeit)  $\mathbf{v}_0$  als Funktionen des Ortes im Vergleich zur Wellenlänge  $\lambda$  des Schallsignals nur langsam ändern dürfen. Diese Voraussetzung wird durch die Beziehung

$$\frac{|\nabla(c + \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}|}{c} \ll \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.13)$$

beschrieben, wobei  $\mathbf{n}$  den Einheitsvektor senkrecht zur Wellenfront darstellt. Der Zusammenhang zwischen der Wellenlänge eines Schallsignals und seiner Frequenz ist gegeben durch

$$c = \lambda f . \quad (2.14)$$

Die Bedingungen für die Anwendbarkeit der geometrischen Akustik sind bei atmosphärischen Betrachtungen meist gegeben, da Änderungen des Atmosphärenzustands über kurze Entfernungen (Größenordnung 100 m) und in einem Zeitbereich von wenigen Sekunden gering sind (Groves, 1955).

Die Beschreibung der Schallausbreitung entlang eines Schallstrahls  $\mathbf{s}_p(t)$  ist dann gegeben durch (Pierce, 1994)

$$\frac{d\mathbf{s}_p}{dt} = \mathbf{v}_0(\mathbf{s}_p, t) + \mathbf{n}(\mathbf{s}_p, t) c(\mathbf{s}_p, t) . \quad (2.15)$$

## 2.2. Schallgeschwindigkeit in Gasen

Bei der Herleitung der Wellengleichung für die Ausbreitung des Schalls wurde mit der Schallgeschwindigkeit ein Proportionalitätsfaktor eingeführt (Gleichung (2.7)). Zur besseren Unterscheidbarkeit soll diese Geschwindigkeit im Folgenden als Laplace'sche Schallgeschwindigkeit bezeichnet werden und darauf hinweisen, dass Laplace (1816) als erster erkannte, dass die Schallausbreitung ein adiabatischer Prozess ist. In den folgenden Kapiteln werden verschiedene Einflüsse des Ausbreitungsmediums auf die Geschwindigkeit der Ausbreitung akustischer Signale beschrieben und analysiert.

### 2.2.1. Abhängigkeit von der Temperatur

Die Laplace'sche Schallgeschwindigkeit  $c_L$  für ein ideales Gas (Luft) ergibt sich aus Gleichung (2.7) unter Verwendung der Abhängigkeit zwischen Druck und Dichte für adiabatische Zustandsänderungen

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (2.16)$$

sowie der Zustandsgleichung für ideale Gase (allgemeine Gasgleichung)

$$p = \rho R_s T \quad (2.17)$$

zu

$$c_L = (\gamma R_s T)^{1/2}. \quad (2.18)$$

Hierbei bezeichnen  $\gamma$  das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten bei konstantem Druck ( $c_p$ ) und konstantem Volumen ( $c_v$ ),  $R_s$  die spezifische Gaskonstante von Luft und  $T$  die absolute Temperatur.

Das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten  $\gamma$  kann als Funktion der Freiheitsgrade  $FG$  des entsprechenden Mediums dargestellt werden (Bohn, 1988)

$$\gamma = \frac{FG + 2}{FG}. \quad (2.19)$$

Das Gasgemisch Luft besteht im Wesentlichen aus den zweiatomigen Molekülen Stickstoff ( $N_2$ ) und Sauerstoff ( $O_2$ ). Diese besitzen jeweils 5 Freiheitsgrade, drei der Translation und zwei der Rotation. Zusätzliche Freiheitsgrade, beruhend auf internen Schwingungen und Rotationen der Moleküle um die Symmetrieachse, sind bei den herrschenden Umgebungstemperaturen nahezu „eingefroren“ und können vernachlässigt werden (Grimsehl, 1987). Für das Verhältnis der spezifischen Feuchten in Luft kann daher näherungsweise ein Wert von  $\gamma=1,4$  angegeben werden.

Der Wert für die spezifische Gaskonstante  $R_s$  eines Gases ergibt sich aus dem Verhältnis der universellen Gaskonstante  $R^* = 8,314510 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$  zur Molaren Masse  $M$  des Gases nach

$$R_s = \frac{R^*}{M}. \quad (2.20)$$

Da trockene Luft ein Gemisch verschiedener Gasbestandteile ist, muss die spezifische Gaskonstante des Gemischs  $R_{\text{Mix}}$  entsprechend der Volumenanteile  $Vol_i$  der einzelnen Bestandteile nach der Gleichung

$$R_{\text{Mix}} = \frac{R^*}{M_{\text{Mix}}} = \frac{R^*}{\sum_{\text{Anteile}} \text{Vol}_i \cdot M_i} \quad (2.21)$$

berechnet werden. Die Zusammensetzung der Luft kann sich in Abhängigkeit vom Vorhandensein von Quellen oder Senken für einen bestimmten Bestandteil ändern. Allerdings sind diese Änderungen im Vergleich zum Volumenanteil des Gases selbst in Luft (z. B. O<sub>2</sub>) sehr gering oder sie betreffen Bestandteile, die nur in Spuren vorhanden sind (z. B. CO<sub>2</sub>, CH<sub>4</sub>). Aufgrund der guten Durchmischung in der Atmosphäre können die Volumenanteile trockener Luft in der Homosphäre, der Atmosphärenschicht, welche sich bis in eine Höhe von ca. 100 km erstreckt, als konstant angenommen werden (Kraus, 2004). Entsprechende Werte für die wichtigsten Gasbestandteile sind in Tabelle 1 zusammengefasst.

Tabelle 1: Zusammensetzung der Standardatmosphäre (trockene Luft ohne Wasserdampf) nach ISO 2533-1975 (E) (nach Wong, 1986) und Molare Masse der Stoffe (nach Baehr, 2005).

Stoff	Volumenanteil	Molare Masse $M$ des Stoffes
N <sub>2</sub> Stickstoff	78,084%	28,0134 kg kmol <sup>-1</sup>
O <sub>2</sub> Sauerstoff	20,947%	31,9988 kg kmol <sup>-1</sup>
Ar Argon	0,934%	39,948 kg kmol <sup>-1</sup>
CO <sub>2</sub> Kohlendioxid	0,031%	44,0100 kg kmol <sup>-1</sup>

Die Berechnung der spezifischen Gaskonstante für das Gemisch trockener Luft  $R_{\text{tr}}$  nach Gleichung (2.21) unter Verwendung der in Tabelle 1 angegebenen Volumenanteile und molaren Massen der Bestandteile ergibt einen Wert von etwa 287,1 J kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>.

Setzt man in Gleichung (2.18) die Werte für  $\gamma$  und  $R_s = R_{\text{tr}}$  ein, und betrachtet die Schallgeschwindigkeit bei einer Temperatur von  $T = 273,15$  K, ergibt sich für  $c_L$  der Wert 331,3 m s<sup>-1</sup>. Die Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Temperatur kann durch Differentiation von Gleichung (2.18) nach  $dT$  bestimmt werden. Dieses Vorgehen ergibt eine indirekte Proportionalität zu  $T^{1/2}$ .

Betrachtet man die Temperatur  $T$  bei einem Wert von 273,15 K, kann der Geschwindigkeitsgradient mit etwa 0,6 (m s<sup>-1</sup>) K<sup>-1</sup> angegeben werden. Die Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit  $c_L$  in m s<sup>-1</sup> nahe 0°C kann somit durch die Approximation

$$c_L = 331,3 + 0,6 \vartheta \quad (2.22)$$

beschrieben werden.  $\vartheta$  ist hierbei die Temperatur in Grad Celsius. Aus dieser Approximation wird deutlich, dass eine Erhöhung der Temperatur um 1°C einen Anstieg der Schallgeschwindigkeit um 0,6 m s<sup>-1</sup> bewirkt.

### 2.2.2. Abhängigkeit von der Luftfeuchtigkeit

In Absatz 2.2.1 wurde davon ausgegangen, dass die Atmosphäre ein (nahezu) konstantes Gemisch verschiedener Gasbestandteile darstellt. Dabei wurde insbesondere trockene Luft betrachtet. Im Gegensatz zu den trockenen Bestandteilen ist der Anteil an Wasserdampf in der Atmosphäre sowohl räumlich als auch zeitlich sehr variabel. Sein Volumenanteil liegt zwischen 0 und 4% (Kraus, 2004). Obwohl die Temperatur einen weitaus größeren Einfluss auf die Schallgeschwindigkeit ausübt als die Feuchte (Harris, 1971), soll deren Einfluss in diesem Kapitel untersucht und abgeschätzt werden.

Die spezifische Gaskonstante eines Gasgemisches ist nach Gleichung (2.21) von der Zusammensetzung des Gasgemisches und damit vom Feuchtegehalt der Luft (bei konstanter Zusammensetzung der trockenen Bestandteile) abhängig. Für ein ideales Gas gilt weiterhin, dass der Volumenanteil eines Bestandteils gleich dem Druckanteil ist. Für ein Gasgemisch aus trockenen Anteilen (Index  $tr$ ) und Wasserdampf (Index  $w$ ), lässt sich die spezifische Gaskonstante des Gemischs (feuchte Luft,  $R_f$ ) berechnen zu

$$R_f = \frac{R^*}{Vol_{tr} \cdot M_{tr} + Vol_w \cdot M_w} = \frac{p \cdot R_w}{(p - e) \cdot R_w + e \cdot R_{tr}} \cdot R_{tr}. \quad (2.23)$$

Hierbei ist  $p$  der Luftdruck des Gasgemischs und  $e$  der Partialdruck des Wasserdampfes. Die spezifische Gaskonstante für trockene Luft beträgt  $287,05 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  und für Wasserdampf  $461,52 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  (Baehr, 2005)

Die Beziehung zwischen der spezifischen Gaskonstante des Gemisches ( $R_f$ ) und der spezifischen Gaskonstante für trockene Luft ( $R_{tr}$ ) kann durch die Einführung der spezifischen Feuchte  $q$  dargestellt werden. Diese Größe ist definiert als Verhältnis zwischen der Wasserdampfdichte  $\rho_w$  und der Dichte der feuchten Luft  $\rho_f$

$$q = \frac{\rho_w}{\rho_f} = \frac{\rho_w}{\rho_w + \rho_{tr}}, \quad (2.24)$$

wobei  $\rho_{tr}$  die Dichte der trockenen Luft ist.

Den Zusammenhang zwischen Druck  $p$ , Dichte  $\rho$ , Temperatur  $T$  und spezifischer Gaskonstante  $R_s$  des Gases liefert die allgemeine Gasgleichung (2.17), womit sich die spezifische Feuchte aus Gleichung (2.24) wie folgt ausdrücken lässt

$$q = \frac{e \cdot R_{tr}}{(p - e) \cdot R_w + e \cdot R_{tr}}. \quad (2.25)$$

Durch Erweiterung des Zählers aus Gleichung (2.23) ergibt sich die spezifische Gaskonstante eines Gemischs feuchter Luft in Abhängigkeit von der spezifischen Gaskonstante trockener Luft zu

$$R_f = \left[ \frac{(p-e) \cdot R_w + e \cdot R_{tr} + e \cdot (R_w - R_{tr})}{(p-e) \cdot R_w + e \cdot R_{tr}} \right] \cdot R_{tr} = \left[ 1 + \frac{e \cdot (R_w - R_{tr})}{(p-e) \cdot R_w + e \cdot R_{tr}} \right] \cdot R_{tr}. \quad (2.26)$$

Nach Einsetzen von (2.25) erhält man die Beziehung zwischen  $R_f$  und der spezifischen Feuchte  $q$  in Luft

$$R_f = \left[ 1 + (R_w - R_{tr}) \cdot \frac{e}{(p-e) \cdot R_w + e \cdot R_{tr}} \right] \cdot R_{tr} = \left[ 1 + \left( \frac{R_w}{R_{tr}} - 1 \right) \cdot q \right] \cdot R_{tr}. \quad (2.27)$$

Neben der spezifischen Gaskonstante werden auch die spezifischen Wärmekapazitäten  $c_p$  und  $c_v$  und somit auch deren Verhältnis  $\gamma$  vom Feuchtegehalt des Gasgemischs beeinflusst. Die Berechnung des Mischungswertes erfolgt aus den spezifischen Größen der Bestandteile, die mit ihren jeweiligen Massenanteilen  $m_i$  gewichtet werden (Baehr, 2005)

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\sum m_i \cdot c_{p,i}}{\sum m_i \cdot c_{v,i}} = \frac{\frac{\sum \rho_i \cdot c_{p,i}}{\rho}}{\frac{\sum \rho_i \cdot c_{v,i}}{\rho}}. \quad (2.28)$$

Analog zu den Betrachtungen der spezifischen Gaskonstante für feuchte Luft kann für die Bestimmung der Feuchteabhängigkeit der Wärmekapazitäten ebenfalls ein Gemisch trockener Bestandteile, deren Zusammensetzung als konstant betrachtet werden kann, mit Wasserdampf zu Grunde gelegt werden. Die Größen der spezifischen Wärmekapazitäten für trockene Luft und Wasserdampf sind in Tabelle 2 zusammengestellt.

Tabelle 2: Spezifische Wärmekapazitäten von Wasserdampf ( $w$ ) und trockener Luft ( $tr$ ) bei konstantem Volumen ( $v$ ) bzw. konstantem Druck ( $p$ ) (nach Baehr, 2005).

$c_{p,w}$	$c_{p,tr}$	$c_{v,w}$	$c_{v,tr}$
1864,6 J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>	1004,7 J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>	1403,1 J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>	717,7 J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>

Betrachtet man weiterhin die Definition der spezifischen Feuchte  $q$  als Verhältnis der Dichten des Wasserdampfes und der feuchten Luft (Gleichung 2.24), erhält man für den Mischungswert  $\gamma_f$  der feuchten Luft folgende Beziehung

$$\gamma_f = \frac{1 + \left( \frac{c_{p,w}}{c_{p,tr}} - 1 \right) \cdot q}{1 + \left( \frac{c_{v,w}}{c_{v,tr}} - 1 \right) \cdot q} \cdot \frac{c_{p,tr}}{c_{v,tr}}. \quad (2.29)$$



Typische atmosphärische Werte für die spezifische Feuchte können anhand Gleichung (2.25) abgeschätzt werden. Die Berechnung des Dampfdrucks  $e$  in hPa über einer ebenen Wasserfläche erfolgt z. B. aus der relativen Feuchte  $r.H.$  in % und der Lufttemperatur  $\vartheta$  in °C mittels der Magnus-Formel

$$e = \frac{r.H.}{100\%} 6,107 \cdot 10^{\left(\frac{7,5 \vartheta}{237 + \vartheta}\right)}. \quad (2.30)$$

Ein Überblick über spezifische Feuchten für verschiedene Temperaturen bei Wasserdampfsättigung ( $r.H. = 100\%$ ) und einem Umgebungsdruck von 1000 hPa ist in Tabelle 3 gegeben.

Tabelle 3: Spezifische Feuchte  $q$  für verschiedene Lufttemperaturen  $\vartheta$  bei einem Druck von 1000 hPa und Wasserdampfsättigung.

$\vartheta$ in °C	-15	0	15	25	35
$q$ in g kg <sup>-1</sup>	1	4	11	20	36

Aus den Beispielen ist ersichtlich, dass unter atmosphärischen Bedingungen als obere Grenze für Werte der spezifischen Feuchte 40 g kg<sup>-1</sup> angenommen werden kann. Lokale Unterschiede in Abhängigkeit von Temperatur- und Feuchteschwankungen liegen hingegen im Bereich weniger g kg<sup>-1</sup>. Aufgrund der Größenordnung der spezifischen Feuchte kann in erster Näherung eine Linearisierung der Abhängigkeit vorgenommen werden. Hierzu wird das Produkt  $\gamma_f \cdot R_f$  in eine Taylorreihe entwickelt und lediglich der lineare Anteil in  $q$  betrachtet

$$\gamma_f \cdot R_f \approx \left[ 1 + \left( \frac{R_w}{R_{tr}} + \frac{c_{p,w}}{c_{p,tr}} - \frac{c_{v,w}}{c_{v,tr}} - 1 \right) q \right] \gamma_{tr} R_{tr}. \quad (2.31)$$

Dieser beträgt mit den angegebenen Werten für die spezifischen Gaskonstanten und die spezifischen Wärmekapazitäten

$$\gamma_f \cdot R_f \approx [1 + 0,51 q] \gamma_{tr} R_{tr}. \quad (2.32)$$

Der Einfluss des Feuchtegehalts der Luft auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit akustischer Signale lässt sich anhand Gleichung (2.18) bestimmen

$$c_L = \left[ (1 + 0,51 q) \gamma_{tr} R_{tr} T \right]^{1/2}. \quad (2.33)$$

Sowohl experimentelle als auch theoretische Untersuchungen zur Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von Feuchte und Temperatur haben Wong und Embleton (1985) durchgeführt und Approximationsgleichungen für die untersuchte Abhängigkeit aufgestellt. Bei ihren Betrachtungen werden Änderungen analysiert, welche sich in einem Temperaturbereich von 0°C bis 30°C und einer relativen Feuchte zwischen 0% und 100% erge-

ben. Der maximale Unterschied zwischen trockener und gesättigter Luft wird dabei bei 30°C erreicht. Für diese Temperatur beträgt die Schallgeschwindigkeit in trockener Luft nach Gleichung (2.33) ( $q=0 \text{ g kg}^{-1}$ )  $349,0 \text{ m s}^{-1}$ . Die Berechnung der Schallgeschwindigkeit für wasserdampfgesättigte Luft ( $r.H. = 100\%$ ) ergibt nach Gleichung (2.33) unter Verwendung der Beziehungen (2.25) und (2.30) einen Wert von  $351,4 \text{ m s}^{-1}$ . Der Unterschied zur Schallgeschwindigkeit in trockener Luft beträgt folglich  $2,4 \text{ m s}^{-1}$  und entspricht damit nahezu dem von Wong und Embleton bestimmten Wert. Sie geben das Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten in diesem Fall (feucht zu trocken) mit 1,0067 an (trocken zu trocken = 1). Dieser Wert entspricht einem Unterschied in der Schallgeschwindigkeit von etwa  $2,3 \text{ m s}^{-1}$ .

Die räumliche Variabilität der spezifischen Feuchte in einem Bereich von einigen Dekametern liegt bei wenigen  $\text{g kg}^{-1}$ . Zur Größenabschätzung wurden die Unterschiede für einen Rückgang der relativen Feuchte um 10% (von 100% auf 90%) bei verschiedenen Temperaturen berechnet. In Abbildung 1 sind die resultierenden Differenzen der spezifischen Feuchte und der Schallgeschwindigkeit dargestellt. Deutlich sichtbar ist, dass Differenzen der spezifischen Feuchte von  $4 \text{ g kg}^{-1}$  bei einem Rückgang der relativen Feuchte um 10% nicht überstiegen werden. Die resultierenden Unterschiede in der Schallgeschwindigkeit betragen somit maximal  $0,35 \text{ m s}^{-1}$ . Diese Abhängigkeit liegt deutlich unter der Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit. Um aus Schallgeschwindigkeitsmessungen auf Lufttemperaturen zu schließen, ist es daher in der Regel ausreichend, die Feuchte an einem Ort zu bestimmen und die akustischen Messungen entsprechend Gleichung (2.33) in Temperaturwerte umzurechnen.

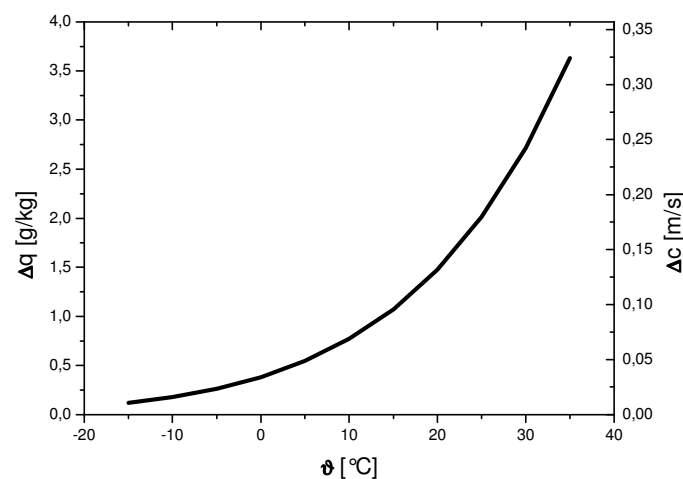


Abbildung 1: Abhängigkeit der spezifischen Feuchte  $q$  und der resultierenden Schallgeschwindigkeit  $c$  von der Lufttemperatur. Berechnet wurden die Unterschiede der spezifischen Feuchte  $\Delta q$  bei einem Rückgang der relativen Feuchte von 100% auf 90% bei einem Umgebungsdruck von 1000 hPa. Die entsprechenden Unterschiede in der Schallgeschwindigkeit  $\Delta c$ , die sich aus dieser Feuchtevariabilität für die entsprechende Temperatur ergeben, sind an der rechten Achse abgetragen.

Es ist ebenfalls denkbar, die Temperatur in Form einer „Feuchttemperatur“ darzustellen. In Anlehnung an die virtuelle Temperatur (s. z. B. Liljequist und Cehak, 1984), wird diese Temperatur als akustisch virtuelle Temperatur  $T_{av}$  bezeichnet und wie folgt definiert

$$T_{av} = (1 + 0,51 q) T, \quad (2.34)$$

womit sich Gleichung (2.33) schreiben lässt als

$$c_L = (\gamma_{tr} R_{tr} T_{av})^{1/2}. \quad (2.35)$$

Detaillierte experimentelle Untersuchungen des Einflusses der Luftfeuchtigkeit auf die Schallgeschwindigkeit wurden u. a. von Harris (1971) durchgeführt. Die Ergebnisse seiner Messungen bestätigen die Gültigkeit der theoretischen Betrachtungen ab einem relativen Feuchtegehalt der Luft von ca. 30%, wonach die Schallgeschwindigkeit mit wachsender Feuchte zunimmt. Für geringe relative Feuchten zeigen sowohl Simulationen (Morfeý und Howell, 1980) als auch Harris' Experimente eine Abnahme der Schallgeschwindigkeit mit zunehmendem Feuchtegehalt. Dieses Verhalten kann auf die molekulare Relaxation, insbesondere von Sauerstoff, zurückgeführt werden. Da bei atmosphärischen Betrachtungen im Allgemeinen relative Feuchten von deutlich über 30% auftreten, kann die Feuchteabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit für die weiteren Betrachtungen nach Gleichung (2.33) berechnet werden.

Die oben getroffenen Aussagen zur Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit vom Feuchtegehalt der Luft sind ohne Weiteres auf beliebige Gaszusammensetzungen übertragbar. Zur Bestimmung der Temperatur aus Schallgeschwindigkeitsmessungen sind die entsprechenden Parameter (spezifische Gaskonstante und Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten) für die aktuelle Zusammensetzung des Gasgemischs nach den Gleichungen (2.21) und (2.28) zu berechnen und in Gleichung (2.18) einzusetzen.

### 2.2.3. Abhängigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit

In den Abschnitten 2.2.1 und 2.2.2 wurde gezeigt, wie sich Temperatur und Zusammensetzung eines Gasgemischs auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit akustischer Signale auswirken. Die genannten Größen beeinflussen die Schallgeschwindigkeit richtungsunabhängig (skalar). Im Gegensatz dazu bewirken Bewegungen des Mediums (Strömungsgeschwindigkeit, Wind) eine richtungsabhängige (vektorielle) Änderung der Schallgeschwindigkeit. Die Geschwindigkeit der Schallausbreitung  $c_{\text{Gruppe}}$  ergibt sich durch Vektoraddition der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schallsignals normal zur Wellenfront, wobei  $\mathbf{n}$  der Einheitsvektor normal zur Wellenfront ist, und dem Strömungsvektor  $\mathbf{v}$  des Mediums zu

$$\mathbf{c}_{\text{Gruppe}}(T_{av}, \mathbf{v}) = c_L(T_{av}) \mathbf{n} + \mathbf{v}. \quad (2.36)$$

Diese Geschwindigkeit wird auch als Gruppengeschwindigkeit bezeichnet und beschreibt die Geschwindigkeit der Energieausbreitung (Ostashev, 1997). Es ist darauf zu achten,

dass alle Größen in Gleichung (2.36) Funktionen des Ortes und der Zeit sind. Dies gilt ebenfalls für den Einheitsvektor  $\mathbf{n}$ , dessen Richtung sich während der Ausbreitung infolge des Windeinflusses kontinuierlich ändert. Der Weg des Schallsignals  $\mathbf{r}(t)$ , der durch die Beziehung

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{c}_{\text{gruppe}}(t) dt \quad (2.37)$$

beschrieben wird, entspricht dem Ausbreitungsweg der Schallwelle und spiegelt einen Schallstrahl wider.

Die Phasengeschwindigkeit  $c_{\text{Phase}}$ , d.h. die Geschwindigkeit, mit welcher sich Flächen konstanter Phase ausbreiten, ist durch

$$\mathbf{c}_{\text{Phase}}(T_{\text{av}}, \mathbf{v}) = (c_L(T_{\text{av}}) + \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{n} \quad (2.38)$$

gegeben (Ostashev, 1997).

Als effektive Schallgeschwindigkeit  $c_{\text{eff}}$  soll nun diejenige Geschwindigkeit bezeichnet werden, welche das akustische Signal bei direkter Ausbreitung vom Schallsender zum Empfänger benötigt. Sie ist näherungsweise gegeben durch (Ostashev, 1997)

$$c_{\text{eff}}(T_{\text{av}}, \mathbf{v}) = c_L(T_{\text{av}}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{s} = c_L(T_{\text{av}}) + v_{\text{Strahl}} \quad (2.39)$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{s}$  den Einheitsvektor entlang der direkten Verbindungslinie zwischen Schallsender und Empfänger (geradliniger Schallstrahl) und  $v_{\text{Strahl}}$  kennzeichnet die Projektion des Strömungsvektors auf die Verbindungslinie zwischen Schallsender und Empfänger, d.h. die Strömungskomponente entlang des direkten Schallstrahls.

Die Zusammenhänge zwischen Strömungsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$ , Schallausbreitung im ruhenden Medium (senkrecht zur Wellenfront:  $c_L \mathbf{n}$ ) und der effektiven Schallgeschwindigkeit  $c_{\text{eff}}$  werden in Abbildung 2 veranschaulicht.

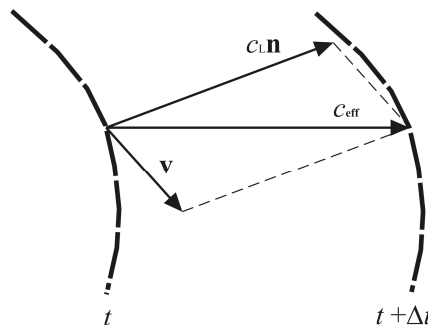


Abbildung 2: Einfluss der Strömungsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$  auf die Schallausbreitung. Die Ausbreitungsrichtung der Schallwelle ist normal zur Wellenfront gerichtet ( $c_L \mathbf{n}$ ). Die resultierende Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{c}_{\text{eff}}$  ergibt sich aus der Vektorsumme der strömungsunbeeinflussten Schallgeschwindigkeit normal zur Wellenfront und der Strömungsgeschwindigkeit.

## 2.3. Brechung, Reflexion und Dämpfung akustischer Signale

Neben den Einflüssen auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit akustischer Signale in Luft wirken sich meteorologische Parameter, lokale Gegebenheiten sowie die Geometrie von Sendern und Empfängern auf die Eigenschaften der Schallausbreitung aus. Wesentliche Veränderungen bei der Schallausbreitung entstehen hierbei durch eine Richtungsänderung der Schallwellen (Brechung bzw. Reflexion) infolge von Gradienten meteorologischer Parameter bzw. durch das Auftreffen der Schallenergie auf Begrenzungsflächen innerhalb des Schallweges (z.B. Wände, Boden). Weitere Modifikationen von Schallwellen bei deren Ausbreitung sind mit der Dämpfung von Schallenergie infolge der Schallausbreitung (geometrische Dämpfung), atmosphärischer Absorption, Energieverlusten bei der Reflexion oder mit Streuung durch Turbulenz verbunden (Chessel, 1977; Sutherland und Daigle, 1998; ISO 9613-2, 1996; VDI 2714, 1988).

Zahlreiche Arbeiten beschäftigen sich sowohl experimentell (L'Espérance et al., 1993; Wilson et al., 2003; Chunchuzov, 2004) als auch theoretisch (Nijs und Wapenaar, 1990; L'Espérance et al., 1992; Li und Wang, 1997; Heimann und Gross, 1998; Li et al., 1998; Bérengier et al., 2003) mit den Einflüssen der Atmosphäre auf die Ausbreitung von Schallsignalen. Die folgenden Abschnitte geben einen kurzen Überblick über die Effekte der oben genannten Größen auf die Ausbreitungsrichtung und Intensitäten von akustischen Signalen.

### 2.3.1. Intensitätsmaße zur Beschreibung von Schallsignalen

Schallwellen sind Träger von Energie, welche von einer Schallquelle ausgeht und als Schallenergie bezeichnet wird. Eine Größe zur Beschreibung der zeitlichen Abhängigkeit der Schallenergieausbreitung ist die Schallstärke bzw. Schallintensität. Sie ist ein Maß für die Schallenergie, welche pro Sekunde senkrecht durch eine Fläche von  $1 \text{ m}^2$  transportiert wird. Die Berechnung der Schallstärke  $J_s$  erfolgt nach

$$J_s = \frac{1}{2} \frac{p'^2}{\rho \cdot c}, \quad (2.40)$$

wobei  $p'$  den Schalldruck,  $\rho$  die Luftdichte und  $c$  die Schallgeschwindigkeit darstellen.

Die Schallstärken, welche der Mensch wahrnehmen kann, erstrecken sich über mehrere Zehnerpotenzen. Es ist daher sinnvoll, das Verhältnis der aktuellen Schallstärke zu einer Bezugsschallstärke in logarithmischer Form (dekadischer Logarithmus), den Schallstärkepegel  $L_J$ , mit

$$L_J = 10 \log \left( \frac{J_s}{J_0} \right) \text{ in dB} \quad (2.41)$$

anzugeben (Borucki, 1989). Die Bezugsschallquelle  $J_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$  entspricht dabei der Hörschwelle des menschlichen Ohres.

Ersetzt man  $J_s$  und  $J_0$  in Gleichung (2.41) durch die Beziehung in Gleichung (2.40) erhält man den Schalldruckpegel  $L_p$  (Borucki, 1989)

$$L_J = 10 \log \left( \frac{\frac{1}{2} \frac{p'^2}{\rho \cdot c}}{\frac{1}{2} \frac{p_0'^2}{\rho \cdot c}} \right) = 20 \log \left( \frac{p'}{p_0'} \right) = L_p \quad \text{in dB,} \quad (2.42)$$

wobei  $p_0'$  den Bezugsschalldruck (Hörschwellenschalldruck) mit  $p_0' = 2 \cdot 10^5$  Pa beschreibt. Da Schallstärkepegel und Schalldruckpegel identisch sind, wird im Folgenden für beide Größen der Ausdruck Schallpegel verwendet.

Eine Verdopplung des Schalldrucks entspricht nach Gleichung (2.42) einer Erhöhung des Schallpegels um 6 dB, eine Verzehnfachung einer Pegelzunahme von 20 dB. Da die Intensität dem Quadrat des Schalldrucks proportional ist, bedeutet doppelte Intensität eine Zunahme des Schallpegels um 3 dB und eine Erhöhung der Intensität um den Faktor 10 bewirkt eine Zunahme des Schallpegels um 10 dB.

### 2.3.2. Geometrische Dämpfung

Verluste bei der Betrachtung des Schallpegels in verschiedenen Entfernungen von einer Schallquelle ergeben sich zunächst aus geometrischen Betrachtungen, wobei der Einfluss des Mediums vernachlässigt wird und keine Begrenzungsflächen betrachtet werden. Diese, als geometrische Dämpfung bezeichnete Abschwächung, wird von der Art der Quelle und der damit verbundenen anschließenden Form der Wellenausbreitung charakterisiert (Piercy et al., 1977).

Betrachtet man eine Punktschallquelle (Lautsprecher), breiten sich die Signale in Form von Kugelwellen aus. Die Energieausbreitung erfolgt dabei im gesamten Raum um die Schallquelle homogen. Hieraus ergibt sich eine Abnahme des Schallpegels um 6 dB bei Verdopplung der Entfernung zur Schallquelle. Betrachtet man die Schallausbreitung ausgehend von einer (unendlich) langen Linienquelle, wobei die Schallausbreitung zylindrisch erfolgt, beträgt die Dämpfung des Schallpegels bei Verdopplung der Entfernung 3 dB. Eine parallele Wellenausbreitung, welche von einer unendlich ausgedehnten schwingenden Fläche ausgeht, bewirkt hingegen keine Änderung des Schallpegels.

Bei Quellen mit einer begrenzten Ausdehnung, kann das Schallfeld in ein Nah- und ein Fernfeld unterteilt werden. Im Nahfeld kann die Schallausbreitung dabei im Allgemeinen als parallel und im Fernfeld als kugelförmig beschrieben werden.

### 2.3.3. Atmosphärische Absorption

Eine Schallwelle, welche sich in Luft ausbreitet, wird neben den Schallpegelverlusten infolge geometrischer Dämpfung durch Wechselwirkungen mit dem Medium abgeschwächt.

Diese Verluste werden dabei durch klassische Absorption (klassische Dämpfung) und molekulare Dämpfung hervorgerufen.

Als klassische Dämpfung wird die Kombination von Wärmeleitung und Viskosität (Scherströmungen verbunden mit Verlusten aufgrund innerer Reibung) bezeichnet. Hierbei wird Schallenergie in Wärmeenergie umgewandelt. Weitere klassische Verluste sind Diffusion (Beitrag an der klassischen Dämpfung von 0,3%) sowie Strahlungsverluste (nur bei sehr kleinen Wellenlängen von Bedeutung) (Evans et al., 1972).

Molekulare Dämpfung wird durch die Anregung von Translations-, Rotations- oder Schwingungsbewegungen mehratomiger Gase und der damit verbundenen Speicherung der Energie in Form von Wärmeenergie verursacht. Die Verteilung der Wärmeenergie auf die verschiedenen Bewegungszustände (Bewegungsenergie) wird dabei als thermische Relaxation bezeichnet (Kuttruff, 2004). Bei der Schallausbreitung ist die Absorption durch Relaxation vorrangig an die Moleküle Sauerstoff und Stickstoff gebunden. Shields und Bass (1977) geben an, dass der Einfluss der verschiedenen Dämpfungsprozesse in unterschiedlichen Frequenzbereichen maximal ist. Die Lage des Absorptionsmaximums im Frequenzbereich entspricht dabei der Relaxationsfrequenz bzw. reziproken Relaxationszeit, verursacht durch den entsprechenden Gasbestandteil. Sie geben weiter an, dass bei einer Temperatur von 293,15 K, einem Druck von 1 atm (1013,25 hPa) und einer relativen Feuchte von 70% die Relaxation von Stickstoff eine Absorption von Schallenergie insbesondere für kleine Frequenzen (maximale Absorption bei 574 Hz) bewirkt, während die Relaxation von Sauerstoff eine Dämpfung höherer Frequenzen (maximale Absorption bei etwa 59 kHz) verursacht.

Die atmosphärische Absorption kann durch den Absorptionskoeffizienten  $\alpha$  beschrieben werden. Dieser setzt sich aus den Absorptionsanteilen hervorgerufen durch die Schwingungsrelaxation von Stickstoff ( $\alpha_{\text{vib,N}}$ ) bzw. Sauerstoff ( $\alpha_{\text{vib,O}}$ ), die Rotationsrelaxation ( $\alpha_{\text{rot}}$ ) sowie die klassische Dämpfung ( $\alpha_{\text{kl}}$ ) zusammen

$$\alpha = \alpha_{\text{vib,N}} + \alpha_{\text{vib,O}} + \alpha_{\text{k,r}} \quad \text{mit} \quad \alpha_{\text{k,r}} = \alpha_{\text{kl}} + \alpha_{\text{rot}}. \quad (2.43)$$

Sowohl die klassische als auch die molekulare Absorption sind vom Quadrat der Schallfrequenz abhängig. Daher werden die Dämpfungen infolge der verschiedenen Absorptionsprozesse für Frequenzen unter 1 MHz im Allgemeinen zusammen betrachtet und parametrisiert (Shields und Bass, 1977).

Der Absorptionskoeffizient  $\alpha$  in  $\text{Np m}^{-1}$  ist dabei durch die Parametrisierung

$$\alpha = p \frac{F^2}{p_0} \left\{ \begin{array}{l} 1,84 \cdot 10^{-11} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1/2} + \\ + \left( \frac{T}{T_0} \right)^{-5/2} \left[ \begin{array}{l} 0,01278 \cdot \frac{e^{-2239,1/T}}{F_{r,O} + F^2 / F_{r,O}} + \\ + 0,1068 \cdot \frac{e^{-3352/T}}{F_{r,N} + F^2 / F_{r,N}} \end{array} \right] \end{array} \right\} \left( \frac{\text{Np}}{\text{m}} \right) \quad (2.44)$$

gegeben (Bass et al., 1995). Hierbei sind  $p$  der Luftdruck in atm,  $p_0$  ein Referenzluftdruck (1 atm, wobei 1 atm = 1013,25 hPa),  $T$  die Lufttemperatur in K,  $T_0$  eine Referenztemperatur (293,15 K) und  $F$  die mit dem Luftdruck  $p$  (in atm) skalierte Frequenz  $f$

$$F = \frac{f}{p}. \quad (2.45)$$

Die mit dem Luftdruck skalierten Relaxationsfrequenzen von Stickstoff  $F_{r,N}$  und Sauerstoff  $F_{r,O}$  sind gegeben durch

$$F_{r,N} = \frac{f_{r,N}}{p} = \frac{1}{p_0} \left( \frac{T_0}{T} \right)^{1/2} \left( 9 + 280 h \exp \left\{ -4,17 \left[ \left( \frac{T_0}{T} \right)^{1/3} - 1 \right] \right\} \right) \quad (2.46)$$

$$F_{r,O} = \frac{f_{r,O}}{p} = \frac{1}{p_0} 24 \left( 9 + 4,04 \cdot 10^4 h \frac{0,02 + h}{0,391 + h} \right)$$

$h$  ist ein feuchteabhängiger Faktor, welcher in % angegeben wird und aus der relativen Feuchte  $r.H.$  berechnet werden kann

$$h = r.H. \frac{E / p_0}{p / p_0} = p_0 \left( \frac{r.H.}{p} \right) \left( \frac{E}{p_0} \right). \quad (2.47)$$

Bass et al. (1995) geben zur Berechnung des Verhältnisses des Sättigungsdampfdrucks  $E$  zum Referenzluftdruck  $p_0$  die Beziehung

$$\log \left( \frac{E}{p_0} \right) = \left\{ \begin{array}{l} 10,79586 \left[ 1 - \frac{T_{01}}{T} \right] - \\ - 5,02808 \log \left( \frac{T}{T_{01}} \right) + 1,50474 \cdot 10^{-4} \left( 1 - 10^{-8,29692[T/T_{01}-1]} \right) - \\ - 4,2873 \cdot 10^{-4} \left( 1 - 10^{-4,76955[T/T_{01}-1]} \right) - 2,2195983 \end{array} \right\} \quad (2.48)$$

an, wobei  $T_{01} = 273,16$  K (Tripelpunkttemperatur) ist. Es ist auch möglich, den Sättigungsdampfdruck unter Verwendung der Magnus-Formel (vgl. Gleichung (2.30)) für  $r.H. = 100\%$  zu bestimmen. Die Abweichung zwischen den berechneten Werten für den



Sättigungsdampfdruck  $E$  beträgt bei Atmosphärendruck bis zu Temperaturen von  $45^\circ\text{C}$  unter 2%.

Zur Darstellung der mit dem Luftdruck normierten Dämpfungskoeffizienten  $\alpha/p$  in Abbildung 3, wurden die Pegelwerte von Neper (Np) (basierend auf dem natürlichen Logarithmus) in Dezibel (dB) (basierend auf dem dekadischen Logarithmus) umgerechnet. 1 Np ist dabei gegeben durch (Pierce, 1994)

$$1 \text{ Np} = 20/\ln(10) \text{ dB} \approx 8,686 \text{ dB}. \quad (2.49)$$

Deutlich erkennbar ist eine Frequenzabhängigkeit der Dämpfungskoeffizienten, wobei eine Zunahme mit steigender Frequenz beobachtet wird. Für atmosphärische Betrachtungen äußert sich dieser Zusammenhang darin, dass sich Schallsignale mit niedrigerer Frequenz in der Atmosphäre (räumlich) deutlich weiter ausbreiten können, als Signale mit vergleichsweise hoher Frequenz.

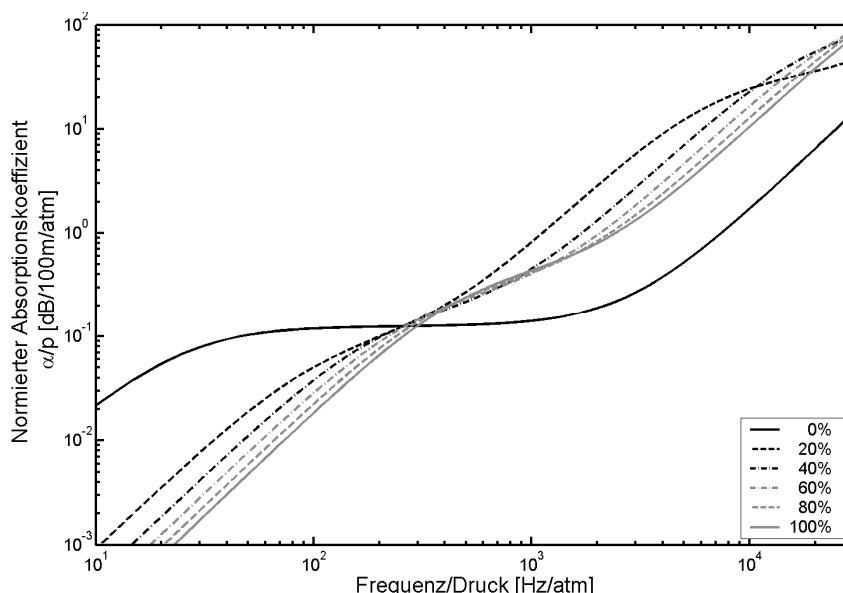


Abbildung 3: Normierte Dämpfungskoeffizienten für verschiedene relative Feuchten in Abhängigkeit von der normierten Frequenz bei einer Umgebungstemperatur von  $20^\circ\text{C}$ . Die Normierung erfolgte mit dem Luftdruck (1 atm, wobei 1 atm = 1013,25 hPa) (nach Bass et al., 1995).

Für höhere Frequenzen ( $> 1 \text{ MHz}$ ) müssen bei der Berechnung des Absorptionskoeffizienten zusätzliche Effekte berücksichtigt werden (Bass, 1981). Des Weiteren unterscheiden sich die Werte für hohe Temperaturen (deutlich über Raumtemperatur), insbesondere bei Feuchtegehalten von über 10%, von den oben parametrisierten Werten (Bass, 1981).

### 2.3.4. Brechung in der Atmosphäre

In Kapitel 2.2.3 wurde bereits der Einfluss der Strömungsgeschwindigkeit auf die Schallausbreitung beschrieben. Neben der Erhöhung/Verringerung des Betrages der Ausbrei-

tungsgeschwindigkeit, verursacht die Strömung eine Richtungsänderung der Schallausbreitung im Vergleich zu einer ruhenden Atmosphäre (Barton, 1899).

Außer der Strömung selbst bewirken räumliche Unterschiede (Gradienten) im Strömungsfeld und in der Temperatur bei der Schallausbreitung über größere Entfernungen eine Richtungsänderung infolge von Brechung (Brown und Hall, 1978; Chunchuzov et al., 1990; L'Espérance et al., 1992; Wilson, 2003; Chunchuzov et al., 2005). Hervorgerufen wird dieser Effekt durch den Übergang der Schallsignale in Bereiche mit abweichender Schallgeschwindigkeit (Pierce, 1994). Dabei werden die Schallstrahlen von Gebieten mit hoher Ausbreitungsgeschwindigkeit zu Gebieten mit niedrigerer Ausbreitungsgeschwindigkeit gebrochen. Trifft ein Schallsignal unter dem Einfallswinkel  $\theta_1$  (in Medium 1) auf die Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Schallgeschwindigkeiten  $c_1$  und  $c_2$ , kann der Brechungswinkel  $\theta_2$  entsprechend des Snellius'schen Gesetzes

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{c_1}{c_2} = \text{const.} \quad (2.50)$$

berechnet werden (Pierce, 1994).

Wie in Abschnitt 2.2 beschrieben, bewirkt ein Temperaturanstieg eine Erhöhung der Schallgeschwindigkeit. Bei atmosphärischen Situationen mit einem negativen Temperaturgradienten (z.B. bei solarer Einstrahlung), ist die Schallgeschwindigkeit in Bodennähe maximal und verringert sich mit zunehmender Höhe. In diesem Fall werden die Schallstrahlen nach oben gebrochen. Nimmt die Temperatur mit der Höhe zu (z.B. bei nächtlicher Ausstrahlung), erhöht sich auch die Schallgeschwindigkeit mit der Höhe. Die Atmosphäre bewirkt in diesem Fall eine Abwärtsbrechung der Schallstrahlen (Abbildung 4).

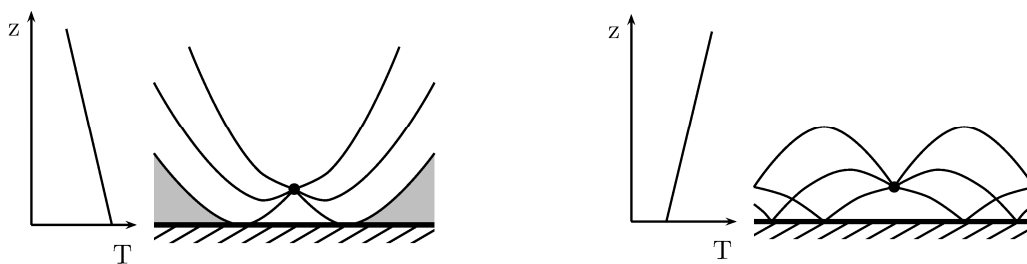


Abbildung 4: Effekt von Gradienten der Lufttemperatur  $T$  auf die Ausbreitungswege akustischer Signale ausgehend von einer punktförmigen Schallquelle. Links: negativer Temperaturgradient, rechts: positiver Temperaturgradient (nach Hallberg et al., 1988). Die grau hinterlegten Flächen kennzeichnen Gebiete, welche von der direkten Schallausbreitung unbeeinflusst sind, sog. Schallschattzonen.

Der Einfluss des Windes ist in ähnlicher Weise gegeben. Da sich die Eigenbewegung des Mediums jedoch richtungsabhängig auf die Schallgeschwindigkeit auswirkt, ist der Wind einfluss bei Brechung in Abhängigkeit von der Ausbreitungsrichtung der Schallstrahlen im Vergleich zur Windrichtung zu betrachten. Bei einer Schallausbreitung in Windrichtung (Mitwind) und Zunahme der Windgeschwindigkeit mit der Höhe, werden die Schallstrah-

len zum Boden hin gebrochen, da die Schallgeschwindigkeit in größeren Höhen höher ist, als in Bodennähe. Betrachtet man die Schallausbreitung bei gleichem Windprofil in Gegenwindrichtung, bewirkt die Strömung des Mediums eine Aufwärtsbrechung der Schallstrahlen (Abbildung 5).

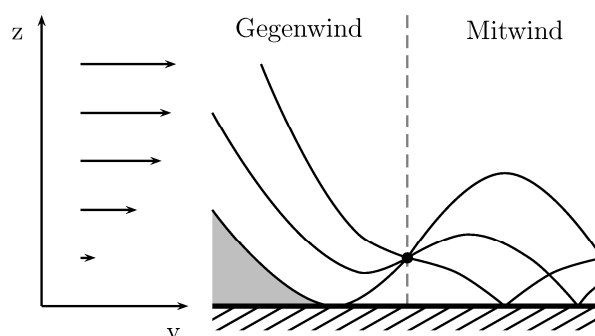


Abbildung 5: Einfluss eines Windgradienten  $v$  auf die Ausbreitungswege akustischer Signale ausgehend von einer punktförmigen Schallquelle (nach Hallberg et al., 1988). In Gegenwindrichtung können sich Schallschattenzonen (grau hinterlegte Fläche) ausbilden.

Ist die Atmosphäre derart geschichtet, dass die Schallstrahlen nach oben gebrochen werden, kommt es zur Ausbildung von Schallschattenzonen. Diese sind dadurch gekennzeichnet, dass sie von der direkten Schallausbreitung (bei Betrachtung der Schallausbreitung in Form von Schallstrahlen) nicht von den akustischen Signalen einer Quelle erreicht werden. Die Kombination beider Effekte (Strömungs- und Temperaturgradienten) führt zum Brechungsgesetz für ein bewegtes Medium und beschreibt die Ausbreitung von Schallstrahlen in einer nichthomogenen Atmosphäre. Für ein bewegtes geschichtetes Medium mit Vertikalgradienten von Temperatur und Strömungsgeschwindigkeit kann das dreidimensionale Brechungsgesetz in der Form

$$c_L \left[ \sqrt{\cos^2 \alpha + [\psi^2 \sin^2 \alpha - v^2 / c_L^2] \sin^2 \alpha} - \psi \sin^2 \alpha \right]^{-1} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} = \text{const.} \quad (2.51)$$

angegeben werden (Ostashev et al., 2001), wobei  $\psi = \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} / c_L$  und  $v = |\mathbf{v}|$ . Die Richtung der Projektion des Ausbreitungsvektors normal zur Wellenfront in die horizontale Ebene wird durch den Einheitsvektor  $\mathbf{e}$  angegeben und die Strömungsgeschwindigkeit durch  $\mathbf{v}$  symbolisiert, wobei zur Vereinfachung angenommen wurde, dass die Vertikalgeschwindigkeit gleich Null ist.  $c_L$  entspricht der Laplace'schen Schallgeschwindigkeit und  $\alpha$  dem Azimutwinkel zwischen Schallstrahl und horizontaler Ebene (vgl. Abbildung 6).

Untersuchungen von Ziemann et al. (2001) haben den Einfluss verschiedener vertikaler Gradienten meteorologischer Parameter auf die Brechung der Schallstrahlen in der Atmosphäre unter Verwendung eines verallgemeinerten Brechungsgesetzes in einer bewegten Atmosphäre untersucht. Hierbei wurde gezeigt, dass Laufzeit- und Laufwegunterschiede zwischen geradlinigem und gebrochenem Schallstrahl für kurze Entfernungen zwischen Sendern und Empfängern sehr gering sind. Für die nachfolgenden Betrachtungen zur An-

wendung eines akustisch tomographischen Verfahrens mit Schallweglängen im Bereich von wenigen Metern wird daher von einer geradlinigen Schallausbreitung ausgegangen und eventuelle Brechungseffekte vernachlässigt.

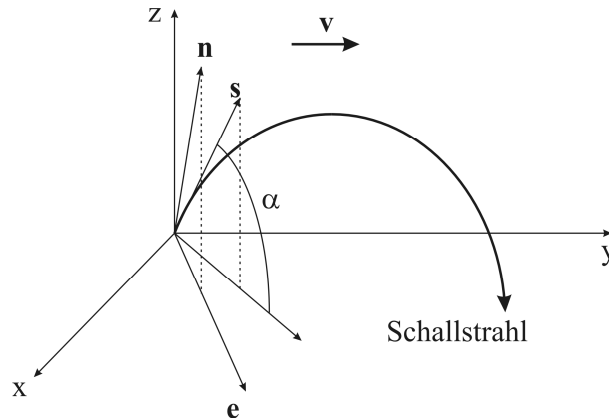


Abbildung 6: Veranschaulichung der Größen und Vektoren zur Berechnung der Schallausbreitung entsprechend des dreidimensionalen Brechungsgesetzes in einem bewegten und geschichteten Medium (nach Ostashev et al., 2001).  $\mathbf{n}$ : Einheitsvektor normal zur Wellenfront,  $\mathbf{s}$ : Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung.

### 2.3.5. Einfluss von Begrenzungsflächen

Neben der Brechung von Schallstrahlen (vgl. Kapitel 2.3.4) bewirkt die Reflexion an Grenzflächen (z. B. Wände, Boden) eine Änderung der Ausbreitungsrichtung akustischer Signale. Außerdem können die Charakteristika der Reflexionsebene eine Abnahme bzw. eine Zunahme der Schallenergie (Dämpfung bei schallweichen Oberflächen, Zunahme bei Reflexion in Schallschattenzonen) bewirken.

Sind die reflektierenden Flächen und ihre Krümmungsradien groß zur Wellenlänge des Schallsignals, kann man die Reflexion als geometrische Spiegelung betrachten (Kuttruff, 2004). In diesem Fall ist der Winkel des auf die Begrenzungsfläche einfallenden Schallstrahls  $\theta$  gleich dem Winkel des reflektierten Schallstrahls  $\theta'$  (vgl. Abbildung 7).

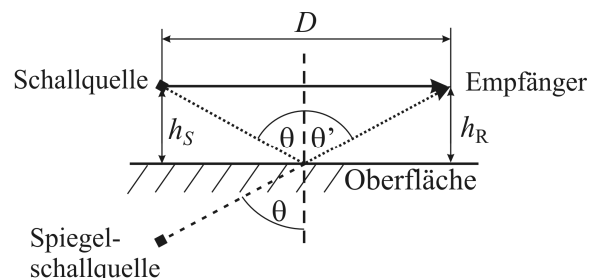


Abbildung 7: Prinzip der Reflexion eines Schallstrahls bei geometrischer Reflexion an einer Oberfläche. Die Schallquelle befindet sich in der Höhe  $h_S$ , der Empfänger in der Höhe  $h_R$ . Aus diesen Größen und der direkten Entfernung  $D$  zwischen Schallsender und Empfänger ergibt sich der Einfallswinkel  $\theta$  und der entsprechende Reflexionswinkel  $\theta'$ . Die Reflexion an der Oberfläche kann auch durch Betrachtung einer Spiegel-schallquelle in der Tiefe  $h_S$  unter der Begrenzungsfläche beschrieben werden.

Zur Beschreibung der Reflexion ist neben der Richtungsänderung auch die Änderung der Amplitude bzw. Phase einer einfallenden Welle zu berücksichtigen. Der Amplitudenreflexionskoeffizient  $R_p$  einer ebenen Welle, welche unter einem bestimmten Einfallswinkel  $\theta$  (vgl. Abbildung 7) auf eine ebene Fläche trifft, ist dabei gegeben durch (Piercy et al., 1977; Chessel, 1977)

$$R_p = \frac{\cos \theta - \frac{Z_1}{Z_2}}{\cos \theta + \frac{Z_1}{Z_2}}, \quad (2.52)$$

wobei die Ausbreitung der Welle innerhalb der Grenzfläche vernachlässigt wird (lokale Reaktion der Oberfläche). Hierbei sind  $Z_1$  bzw.  $Z_2$  Dämpfungskonstanten, welche die Luftdämpfung ( $Z_1 = \rho \cdot c$ ) bzw. die akustische Impedanz der Oberfläche ( $Z_2$ ) beschreiben. Sowohl  $R_p$  als auch  $Z_2$  sind komplexe Größen, um die Möglichkeit zur Beschreibung von Phasendrehungen bei der Reflexion zuzulassen.

Für den Grenzfall, dass  $Z_2 \rightarrow \infty$ , kann der Amplitudenreflexionskoeffizient mit 1 angegeben werden. Dies bedeutet, dass die Phase erhalten bleibt. Eine solche Oberfläche wird als perfekt reflektierende, schallharte Oberfläche bezeichnet (Piercy et al., 1977).  $Z_2$  kann jedoch nicht unendlich groß werden, sondern ist auf einen endlichen Wert begrenzt. Für große Einfallswinkel (nahe  $90^\circ$ ) ist  $\cos \theta \approx 0$  und somit  $R_p \approx -1$  (Embleton et al., 1976). In diesem Fall ändert sich der Amplitudenwert der einfallenden Welle nicht, es kann jedoch eine Phasendrehung um  $180^\circ$  beobachtet werden.

Die Impedanz verschiedener natürlicher Oberflächen wurde bereits experimentell untersucht. So stellen Embleton et al. (1976) Daten für ebenes Grasland und ausgedehnte Asphaltflächen vor und vergleichen diese mit theoretischen Werten. Die Abstände zwischen Sender und Empfänger liegen bei ihren Untersuchungen im Bereich von etwa 15 ... 800 ft (5 ... 244 m). Der Einfluss der Sender- und Empfängerhöhe wurde in einem Bereich von 0,1 ... 4 ft (0,03 ... 1,22 m) variiert. Infolge der Bodenimpedanz bilden sich bei geringer Höhe von Sender und/oder Empfänger Schallschattenzonen in Bodennähe aus. Ihre vertikale Ausdehnung nimmt dabei mit wachsender Entfernung zwischen Sender und Empfänger zu (Embleton et al., 1976; Piercy et al., 1977). Außerdem treten bei größeren Höhen von Sender und Empfänger Interferenzeffekte (Überlagerung des direkten Schallsignals und des reflektierten Signals) auf. Als Ursache hierfür werden zwei Gründe genannt: Eine Phasenverschiebung zwischen direktem und reflektiertem Schallsignal kann zum einen durch Phasendrehung bei der Reflexion selbst (in Abhängigkeit von der Bodenimpedanz) und zum anderen durch Laufwegunterschiede zwischen dem direkten und dem am Boden reflektierten Schallsignal erzeugt werden (Embleton et al., 1976). Die Höhe von Sender bzw. Empfänger hat dabei einen Einfluss auf den Frequenzbereich maximaler Dämpfung (Auslöschung durch Interferenz). Je höher die Schallquelle bzw. der Schallempfänger (je größer der Laufwegunterschied zwischen Sender und Empfänger), desto weiter verschiebt sich der Bereich maximaler Dämpfung zu geringeren Frequenzen. Die Lage des

Pegelminimums  $f_{\min}$  kann für schallharten Boden unter Verwendung von Gleichung (2.14) in Abhängigkeit von der Schallgeschwindigkeit  $c$  und dem Laufwegunterschied  $\Delta D$  zwischen direktem und reflektieren Strahl angegeben werden. Bedingung für das Minimum ist, dass die Schallwegunterschiede ein ungerades Vielfaches der halben Wellenlänge  $\lambda$  betragen (Embleton et al., 1976)

$$\Delta D = n \frac{\lambda}{2} \quad \text{mit } n = 1, 3, 5, \dots, \text{ womit } f_{\min} = \frac{n \cdot c}{2 \Delta D}. \quad (2.53)$$

Ergebnisse von Modellbetrachtungen für verschiedene Entfernungen und Senderhöhen (Chessel, 1977) bestätigen die experimentellen Untersuchungen von Embleton et al. (1976).

Einen Überblick über den kombinierten Einfluss aller Effekte auf die Schallausbreitung, welche sich aus der Nähe zu einer Begrenzungsfläche auf die Dämpfung akustischer Signale ergeben, sind in Abbildung 8 dargestellt. Mit wachsender Entfernung zwischen Schallsender und Empfänger steigt die Dämpfung der Signale durch den Bodeneinfluss (Ausbildung von Schallschattenzonen) und es erfolgt eine Verbreiterung des Schattenbereiches bezüglich der Frequenz.

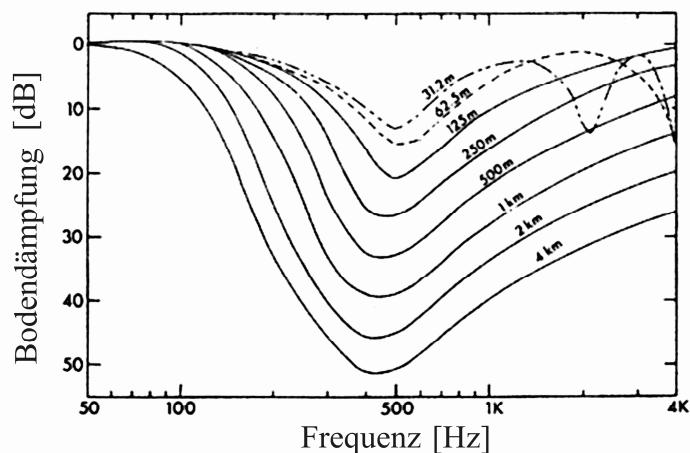


Abbildung 8: Berechnete Dämpfung infolge des Bodeneinflusses in Abhängigkeit von der Frequenz des Schallsignals bei der Ausbreitung akustischer Signale über verschiedene Entfernungen. Die Berechnungen erfolgten für eine punktförmige Schallquelle in einer Höhe von 1,8 m, einem Empfänger in einer Höhe von 1,5 m und den Bodeneigenschaften von gemähtem Gras. Die Dämpfungswerte sind relativ zu den Dämpfungswerten einer punktförmigen Schallquelle, welche sich direkt auf einer perfekt reflektierenden Oberfläche befindet, angegeben (nach Piercy et al., 1977).

### 2.3.6. Einfluss von Turbulenz

Luft unter atmosphärischen Bedingungen ist von zufälligen Schwankungen charakteristischer Größen geprägt. Diese äußern sich in Variationen von Temperatur, Strömungsgeschwindigkeit, Druck und Dichte und werden als Turbulenz bezeichnet.

Turbulenz kann als eine Überlagerung von Wirbeln verschiedener Größe beschrieben werden. Jeder Wirbel ist dabei durch ein sich von der Umgebung unterscheidendes Muster gekennzeichnet. Die größten Wirbel in der atmosphärischen Grenzschicht (AGS), derjenigen Atmosphärenschicht, deren Eigenschaften direkt durch die Anwesenheit der Erdoberfläche beeinflusst werden (Kraus, 2004), erreichen einen Durchmesser, welcher der Ausdehnung der AGS (100 m bis ca. 3000 m) entspricht (Stull, 1991). Sie entstehen durch Wechselwirkung mit der Unterlage (Reibung) bzw. beim Umströmen von Hindernissen (mechanisch induzierte Turbulenz) oder durch konvektive Vorgänge (thermisch induzierte Turbulenz) und sind für einen Großteil der turbulenten Transporte verantwortlich. Die großen, energiereichen Wirbel wechselwirken mit anderen Wirbeln, sie werden deformiert und verformt. Entstehende Instabilitäten bewirken, dass die großen Wirbel nach endlicher Lebenszeit in kleinere und diese nachfolgend in noch kleinere Wirbel zerbrechen. Energie wird bei diesem Vorgang auf kleinere Wirbel übertragen und verteilt. Dieser Prozess wiederholt sich auf allen Größenskalen, bis die Wirbelgröße eine untere Grenze erreicht hat, ab welcher dissipative Vorgänge infolge molekularer Viskosität eine Umwandlung der kinetischen Energie in thermische Energie bewirken.

Die Schallausbreitung wird insbesondere von Temperatur und Geschwindigkeitsschwankungen beeinflusst (s. Kapitel 2.2). Zufällige Variationen dieser Größen bewirken eine Streuung von Schallenergie, Fluktuationen der Schallgeschwindigkeit, Schwankungen der Schallamplitude und Phase sowie des Schalldruckpegels (Wenzel und Keller, 1971; Bass et al., 1991; Sutherland und Daigle, 1998). Die durch Turbulenz verursachten Fluktuationen der Schallgeschwindigkeit wachsen dabei mit zunehmender Entfernung zwischen Schallsender und Empfänger an, bis ein Sättigungswert, ein Wert maximaler Schwankung, erreicht ist (Daigle et al., 1983). Für die maximalen Fluktuationen gemessener Schalldruckpegel um einen Mittelwert geben Daigle et al. (1983) einen maximalen Wert von 6 dB an. Neben Fluktuationen der Schallfeldgrößen bewirkt die Turbulenz eine Dämpfung der Schallenergie in Ausbreitungsrichtung (Blokhintzev, 1946; Brown und Clifford, 1976), welche insbesondere durch Rückstreuung verursacht wird. Die Dämpfung durch Streuprozesse ist dabei von verschiedenen Parametern, wie dem Verlauf der Schallausbreitung (Positionierung der Schallsender und Empfänger), abhängig (Brown und Clifford, 1976).

Eine analytische Beschreibung der Absorption, hervorgerufen durch Fluktuationen von Phase und Amplitude akustischer Signale infolge von turbulenten Schwankungen atmosphärischer Größen geben Clifford und Brown (1970). Darüber hinaus leiten Wenzel und Keller (1971) die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) von Schallwellen für verschiedene Bedingungen analytisch her. Betrachtet werden jeweils hoch- bzw. niederfrequente akustische Signale, deren Frequenz deutlich über bzw. unter der charakteristischen Frequenz der zugrunde liegenden Turbulenz (bzw. deren Wellenlänge deutlich unter bzw. über der charakteristischen Größe der Turbulenzelemente) liegen. Eine Unterscheidung wurde weiterhin bezüglich der Strömungssituation getroffen. In einem ruhenden Medium mit turbulenten Fluktuationen von Temperatur und Dichte zeigen sowohl hoch- als auch niederfrequente Signale eine geringere Ausbreitungsgeschwindigkeit, als die mittlere

Schallgeschwindigkeit im Medium. Während die Ausbreitungsgeschwindigkeit hochfrequenter Signale dabei unabhängig von der Frequenz ist, nimmt die Phasengeschwindigkeit niederfrequenter Signale mit zunehmender Frequenz ab. Die Betrachtungen von Wenzel und Keller (1971) zeigen weiterhin, dass sich die Ausbreitungsgeschwindigkeiten sowohl hochfrequenter als auch niederfrequenter Signale in einem bewegten turbulenten Medium qualitativ wie im ruhenden Fall verhalten. Eine Unterscheidung ergibt sich jedoch bei der Betrachtung der Dämpfungskoeffizienten: Für hochfrequente Signale wirken sich Fluktuationen der Geschwindigkeit in ähnlicher Weise auf die Dämpfung aus, wie Fluktuationen der Temperatur. Bei niederfrequenten Signalen hingegen bewirken turbulente Schwankungen der thermodynamischen Größen einen größeren Dämpfungsanteil im Vergleich zu Fluktuationen der Geschwindigkeit.

Experimentelle Untersuchungen des Einflusses von Turbulenz auf niederfrequente Signale (ca. 20 Hz) bei der Ausbreitung über weite Entfernungen (4,3 km bzw. 9,3 km) beschreibt Chessel (1976). Messungen von Laufzeitunterschieden akustischer Signale einer Explosionsquelle zu verschiedenen Mikrofonen wurden zu unterschiedlichen Tageszeiten durchgeführt (06:00, 12:00, 18:00, 21:30 Uhr), um den Einfluss verschiedener meteorologischer Bedingungen (Turbulenzintensität) abzuschätzen. Aus den Messungen wurden charakteristische atmosphärische Größenskalen der Wirbel abgeschätzt, welche im Bereich von etwa 200 m bis 500 m lagen. Variationen der Schallgeschwindigkeit infolge von Turbulenz wurden bei den Messungen von Chessel (1976) mit Werten zwischen  $0,5 \text{ m s}^{-1}$  bis  $1,2 \text{ m s}^{-1}$  angegeben.

Neben der Dämpfung und einer Änderung der Ausbreitungsgeschwindigkeit bewirkt die Turbulenz infolge von Streuung der Schallenergie an Turbulenzelementen (Wirbeln) eine Abschwächung von Schallschattenzonen, wie sie hinter Hindernissen (z.B. von Interesse zur Einschätzung der Effektivität von Schallschutzwänden, s. Daigle, 1982) oder infolge von Brechung durch Temperatur- bzw. Strömungsgradienten entstehen (Salomons, 2001). Dabei verursachen Strömungskomponenten im Medium, welche quer zur Schallausbreitung gerichtet sind, eine spektrale Verbreiterung des Schallsignals (Brown und Clifford, 1973). Theoretische Betrachtungen haben gezeigt, dass diese Weitung des Spektrums unabhängig von der Entfernung, Ausbreitungsweglänge und Intensität der Turbulenz erfolgt. Wesentlichen Einfluss auf die Verbreiterung haben insbesondere die großen Wirbel innerhalb des Ausbreitungsweges der akustischen Signale (Brown und Clifford, 1973).



### 3. Laufzeitbestimmung akustischer Signale

Das Verfahren der akustischen Laufzeittomographie beruht auf der Messung der Geschwindigkeit akustischer Signale bei bekannten Ausbreitungswegen. Die Ausbreitungswege werden aus geometrischen Betrachtungen, den Positionen der Schallsender und Empfänger unter Annahme geradliniger Schallausbreitung, gewonnen.

Zur Bestimmung der Laufzeit eines akustischen Signals bei bekanntem Ausbreitungsweg wird ein spezifisches Schallsignal  $x(t)$  erzeugt, von einem Lautsprecher ausgesendet und an einem Mikrophon empfangen. Anschließend wird das gesendete Signalmuster im empfangenen Signal  $y(t)$  gesucht. Die Laufzeit des Signals entspricht dann der zeitlichen Verschiebung zwischen gesendetem und empfangenem Signal, bei welcher die Ähnlichkeit der Signale maximal ist.

Eine mathematische Erfassung und Quantifizierung von Ähnlichkeiten zweier Signale liefern Korrelationsverfahren (Lüke, 1995). In den folgenden Kapiteln sollen die Grundlagen der Korrelationsmesstechnik beschrieben, verschiedene Signalformen vorgestellt und auf Berechnungsmethoden zur Korrelationsanalyse eingegangen werden.

#### 3.1. Korrelationsmesstechnik

Ein Maß für die Ähnlichkeit oder die Verwandtschaft eines Zeitsignals  $x(t)$  mit einem anderen Signal  $y(t)$  für verschiedene zeitliche Verschiebungen  $\tau$  stellt deren Kreuzkorrelation dar. Da diese Ähnlichkeit für verschiedene zeitliche Verschiebungen  $\tau$  existiert, kann sie durch die Kreuzkorrelationsfunktion (KKF)  $r_{x,y}(\tau)$  beschrieben werden. Handelt es sich bei den Zeitsignalen um Energiesignale, d. h. ist die Signalenergie über die gesamte Zeitachse endlich, ist die KKF wie folgt definiert (Lüke, 1995; Hoffmann, 1998)

$$r_{x,y}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t + \tau) dt . \quad (3.1)$$

Zur Laufzeitbestimmung wird ein akustisches Signal ausgesendet und empfangen, wobei das Signal auf seinem Ausbreitungsweg nicht modifiziert werden soll. Das gesendete Signal  $x(t)$  unterscheidet sich daher vom empfangenen Signal  $y(t)$  lediglich um einen zeitlichen Versatz zwischen Senden und Empfangen. In Anlehnung an die Definition der Kreuzkorrelationsfunktion in (3.1) wird dieser Zeitversatz, die Laufzeit des Schallsignals, als  $\tau_0$  bezeichnet

$$y(t + \tau_0) = x(t) \quad \text{bzw.} \quad y(t) = x(t - \tau_0) . \quad (3.2)$$

Setzt man (3.2) in (3.1) ein, erhält man

$$r_{x,x}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau_0+\tau) dt, \quad (3.3)$$

und somit die Autokorrelationsfunktion (AKF)  $r_{x,x}(\tau)$  für  $x(t)$  mit  $\tau_0 = 0$

$$r_{x,x}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau) dt. \quad (3.4)$$

Die größte Ähnlichkeit der Signale, und damit der maximale Wert der AKF, wird bei einer Verschiebung von  $\tau=0$  auftreten, wenn das Signal zeitlich nicht verschoben ist. Der Wert entspricht dann gerade der Signalenergie

$$r_{x,x}(\tau=0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt. \quad (3.5)$$

Die Laufzeit  $\tau_0$  kann aus dem Maximum von (3.3) an der Stelle  $\tau' = -\tau_0 + \tau = 0$  mit  $\tau_0 = \tau$  bestimmt werden

$$\text{Maximum}(r_{x,x}(\tau')) = r_{x,x}(\tau_0). \quad (3.6)$$

Da sowohl die Erzeugung der Signale, als auch deren Aufzeichnung und Weiterverarbeitung mittels Messkarten am Computer vorgenommen wird, werden die Signale digital-analog (Ausgabe) bzw. analog-digital (Empfang) gewandelt. Sie stehen somit als diskrete Zeitreihen  $x(n \cdot \Delta t)$  und  $y(n \cdot \Delta t)$ , mit  $n \in \mathbb{N}$ , zur Verfügung. Hierbei entspricht  $\Delta t$  dem Zeitschritt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Signalwerten, dem gesendeten  $x(n \cdot \Delta t)$  und dem empfangenen Signal  $y(n \cdot \Delta t)$ . Ausgehend von Gleichung (3.1) für kontinuierliche Signale wird die Laufzeit digitaler (zeitdiskreter) Signale mit einer endlichen Länge  $N$  aus der Lage des Maximums der Summe

$$r_{x,y}(m \cdot \Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n \cdot \Delta t) y((n+m) \cdot \Delta t) \quad \text{mit } m \in \mathbb{N} \quad (3.7)$$

bestimmt. Der Zeitschritt  $\Delta t$  ist mit der Abtastrate (Digitalisierungsfrequenz)  $f_{\text{dig}}$  der Messkarte wie folgt verknüpft

$$\Delta t = \frac{1}{f_{\text{dig}}}. \quad (3.8)$$

Substituiert man in Gleichung (3.7)  $n' = n + m$  und schreibt  $n' = n$  erhält man

$$r_{x,y}(m \cdot \Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x((n-m) \cdot \Delta t) y(n \cdot \Delta t). \quad (3.9)$$

### 3.2. Fouriertransformation

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Analyse und Interpretation von Zeitsignalen stellt die Fouriertransformation (FT) dar (s. z.B. Brigham, 1992). Diese spektrale Untersuchungsmethode überführt die zeitabhängige Funktion eines physikalischen Prozesses  $h(t)$  in eine frequenzabhängige Funktion  $H(f)$  bzw.  $H(\omega)$  und umgekehrt, wobei die Frequenz  $f = t^{-1}$  bzw. die Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi \cdot t^{-1}$  und  $i$  die imaginäre Einheit mit  $i^2 = -1$  sind

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-2\pi i f t} dt \Leftrightarrow h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{2\pi i f t} df \quad (3.10)$$

bzw.

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \Leftrightarrow h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{i\omega t} df. \quad (3.11)$$

Der Doppelpfeil soll in beiden Fällen verdeutlichen, dass die Funktionen Fourier-Paare bilden. Aufgrund der Analogie zwischen Frequenz und Kreisfrequenz werden die folgenden Betrachtungen auf die Frequenz  $f$  bezogen, sind jedoch ohne Einschränkungen auf die Kreisfrequenz  $\omega$  übertragbar.

Im Allgemeinen gilt, dass  $H(f)$  eine komplexe Funktion darstellt

$$H(f) = H_{\text{real}}(f) + i H_{\text{imag}}(f), \quad (3.12)$$

aus der die Amplitude und die Phase des physikalischen Prozesses im Frequenzraum bestimmt werden können.

Diskret abgetastete Signale im Zeitbereich  $x_n = x(n \cdot \Delta t)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) können nach

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i \frac{n \cdot k}{N}} \Leftrightarrow x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{2\pi i \frac{k \cdot n}{N}} \quad (3.13)$$

in ihre diskrete spektrale Repräsentation  $X_k = X(k \cdot \Delta f)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) umgeformt werden, wobei  $N$  die Anzahl der Datenpunkte beschreibt.

Voraussetzung für eine eindeutige Transformation diskret abgetasteter Signale ist, dass das zugrunde liegende Signal bandbegrenzt ist, d.h. dass Frequenzanteile, welche größer sind als eine Grenzfrequenz, verschwinden (Abtasttheorem). Diese obere Grenzfrequenz, auch als Abschneidefrequenz bezeichnet, ist die Nyquistfrequenz  $f_N$ . Sie ergibt sich aus dem Zeitintervall zur Abtastung des Signals  $\Delta t$  zu

$$f_N = \frac{1}{2 \Delta t}. \quad (3.14)$$

Ist die Voraussetzung der Bandbegrenzung des Signals oberhalb  $f_N$  nicht erfüllt, treten Aliasingeffekte auf, da Frequenzanteile, die nach dem Abtasttheorem nicht explizit aufgelöst werden können, in den auflösbaren Frequenzbereich rückprojiziert werden. In diesem

Fall bilden  $x_k$  und  $X_n$  kein Fourier-Paar, da sie nicht eindeutig ineinander überführt werden können. Zur Vermeidung einer spektralen Rückprojektion muss daher das Signal bereits vor der Digitalisierung analog gefiltert werden.

Eine wichtige Beschreibung von Signalen im Frequenzraum liefert das Betragsspektrum  $E(f)$  (auch Amplitudenspektrum, Powerspektrum, Energiespektrum, s. Stull, 1988) bzw. sein diskretes Äquivalent  $E(n \cdot \Delta f)$ . Es wird aus den spektralen Signalamplituden berechnet

$$E(n \cdot \Delta f) = 2 \left[ H_{\text{real}}^2(n \cdot \Delta f) + H_{\text{imag}}^2(n \cdot \Delta f) \right] \quad \text{mit } n = 1 \dots N. \quad (3.15)$$

### 3.3. Akustische Signale

Die Laufzeitbestimmung akustischer Signale beruht auf der Tatsache, dass ein ausgesendetes Signalmuster  $x(t)$  im empfangenen Signal  $y(t)$  mit einer zeitlichen Verschiebung, der Laufzeit, bestimmt werden kann. Das empfangene Signal setzt sich dabei aus dem zeitlich verschobenen gesendeten Signal (Nutzsinal)  $x(t + \tau_0)$  und einem Störsignal (Rauschen)  $n(t)$  zusammen

$$y(t) = x(t - \tau_0) + n(t). \quad (3.16)$$

Damit die Korrelationsanalyse zur Bestimmung der Schalllaufzeit  $\tau_0$  zu einem eindeutigen Ergebnis führt, sind bestimmte Anforderungen an die Schallsignale zu stellen. Zur Wiedererkennung der Signalmuster muss sichergestellt sein, dass das Schallsignal bei dessen Ausbreitung nicht signifikant modifiziert wird. Des Weiteren muss das ausgesendete Signal eindeutig bestimmbar und reproduzierbar sein. Dies setzt voraus, dass es von Störgeräuschen eindeutig trennbar ist und innerhalb des Signals keine Selbstähnlichkeit auftritt. Als perfekte Korrelationssignale werden dabei Signalmuster angesehen, deren Autokorrelationsfunktionen (vgl. Gleichung (3.4)) ein impulsförmiges Korrelationsergebnis in Form eines Dirac-Impulses liefern (Lüke, 1986).

Im Folgenden sollen drei Signalarten vorgestellt werden, die zur Anwendung bei akustischen Laufzeitmessungen geeignet sind. Neben harmonischen Signalen mit fester Frequenz werden Chirp oder Sweep-Signale und pseudostochastische Rauschfolgen betrachtet, deren Eigenschaften beschrieben und auf Vor- und Nachteile der jeweiligen Signalmuster in Bezug auf Laufzeitmessungen hingewiesen.

#### 3.3.1. Harmonische Signale mit konstanter Frequenz

Als harmonische Signale mit konstanter Frequenz werden Schwingungssignale bezeichnet, die aus Sinusschwingungen einer bekannten konstanten Frequenz bestehen. Die Autokorrelationsfunktion einer (unendlichen) Sinusschwingung entspricht jedoch wiederum einer Sinusschwingung, wodurch eine Bestimmung der Laufzeit zwischen dem gesendeten und dem empfangenen Signal unmöglich wird. Für eine Anwendung im Bereich der akusti-

schen Laufzeittomographie ist es daher nötig, dem Signal eine spezielle Signatur aufzuprägen (Arnold, 2000). Hierfür werden zwei Sinussignale gleicher Frequenz durch eine Pause unterbrochen. Ein entsprechendes Signal mit seiner Autokorrelationsfunktion ist in Abbildung 9 dargestellt. Die Konstruktion des Signals spiegelt sich in der Autokorrelationsfunktion in Form von drei Schwingungen wider. Die mittlere Amplitude ist dabei maximal, da sich die Signale optimal überdecken. Die Nebenschwingungen werden bei der Überlagerung jeweils einer Sinusschwingung im Schallsignal erzeugt.

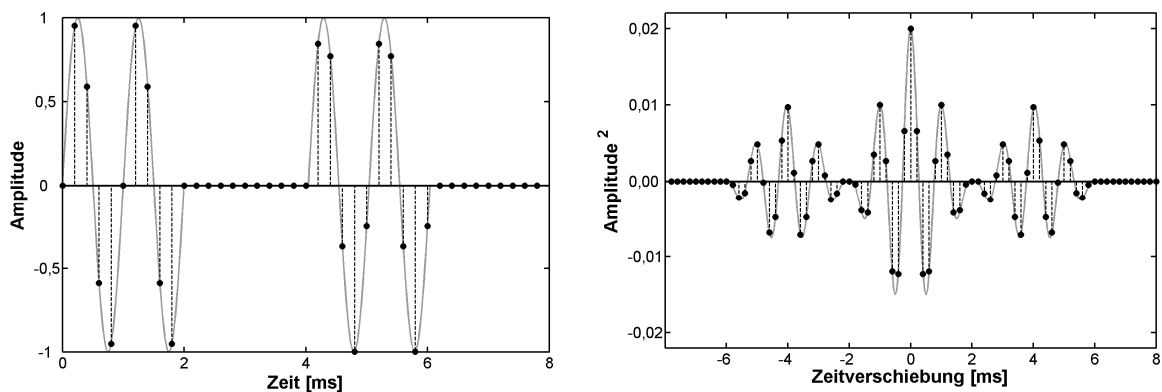


Abbildung 9: Harmonisches Zeitsignal, zusammengesetzt aus zwei Sinusanteilen gleicher Frequenz von 1000 Hz (links) und dessen Autokorrelationsfunktion (rechts). Die Abtastung/Digitalisierung des analogen Signals (graue Linie) erfolgte mit einer Auflösung von 5000 Hz (schwarze Punkte).

Der Vorteil harmonischer Signale besteht in der Möglichkeit zur Frequenzfilterung, wodurch Störeinflüsse, wie Nebengeräusche aus der Umgebung (z. B. Straßen), Windgeräusche an den Messgeräten usw., nahezu eliminiert werden können. Um sowohl niederfrequente als auch hochfrequente Anteile zu entfernen, werden Bandpassfilter verwendet. Wendet man ein Bandpassfilter (Butterworth Filter 1. Ordnung mit den Bandpassgrenzen 900 Hz und 1100 Hz) auf das Signal in Abbildung 9 (links) an, ergibt sich das in Abbildung 10 dargestellte Zeitsignal. Deutlich sichtbar ist die Modifikation des Signals durch die Bandpassfilterung, welche ein langsames Einschwingen der Signaleinsätze, sowie ein längeres Nachschwingen bewirkt.

Während der Schallausbreitung werden die Schallsignale durch Umgebungseinflüsse modifiziert. Sind die Störsignale durch Stationarität (unabhängig vom gewählten Zeitfenster) und Nichtperiodizität gekennzeichnet sowie zufällig verteilt, spricht man von einem Rauschen. Ist die Energie des Signals dabei über den gesamten Frequenzbereich konstant, bezeichnet man es als weißes Rauschen (Hoffmann, 1998; Kuttruff, 2004).

Zur Simulation des Rauscheinflusses auf das harmonische Signal wurde das Doppelsinus-signal mit einem Rauschsignal (gleichverteilte Zufallsreihe um den Amplitudenwert 0, s. Schrüfer, 1992) überlagert (Abbildung 11, links). Die Amplitude des Rauschens entspricht dabei der halben Signalamplitude. Das Ergebnis der Kreuzkorrelation zwischen dem verrauschten und dem unverrauschten Signal ist auf der rechten Seite dargestellt. Die KKF ist deutlich breiter, als die AKF des ungefilterten Signals. Dennoch ist das Maximum der

Kreuzkorrelationsfunktion auch für die gefilterten/verrauschten Signale deutlich bestimmbar und liegt für die diskreten Werte bei 0 ms. Es ist dennoch eine leichte Verschiebung des Symmetriezentrums der KKF in Richtung positive Zeitverschiebungen zu erkennen. Diese Verschiebung muss als Unsicherheit bei der Bestimmung der Schalllaufzeiten berücksichtigt werden.

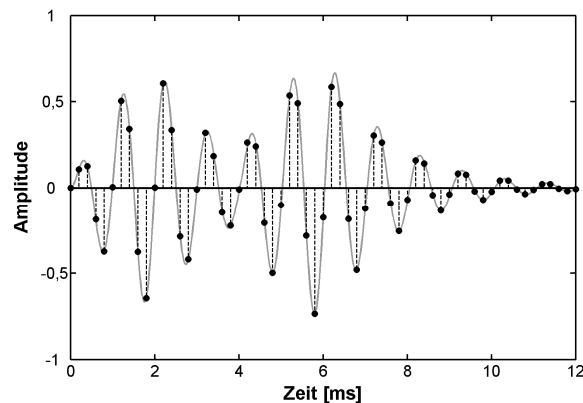


Abbildung 10: Bandpassgefiltertes Signal aus harmonischen Anteilen (vgl. Abbildung 9, links). Graue Linie: Analoges Signal, das mit einer Frequenz von 5000 Hz abgetastet wird (schwarze Punkte).

Harmonische Signale sind für die Bestimmung der Schallgeschwindigkeit nutzbar, wenn ihnen eine bestimmte Struktur aufgeprägt wird. Im vorliegenden Fall wurde das Signal aus zwei getrennten Sinussignalen gleicher Frequenz erzeugt. Der Vorteil dieser Methode ist die Möglichkeit, die Signale vor der Aufzeichnung zu filtern, so dass nur der gewünschte Frequenzbereich aufgezeichnet wird. Um Effekte der Filterung auf die KKF des gesendeten und empfangenen Signals zu vermeiden, sollte auch das gesendete Signal vor der Übertragung bandpassgefiltert werden.

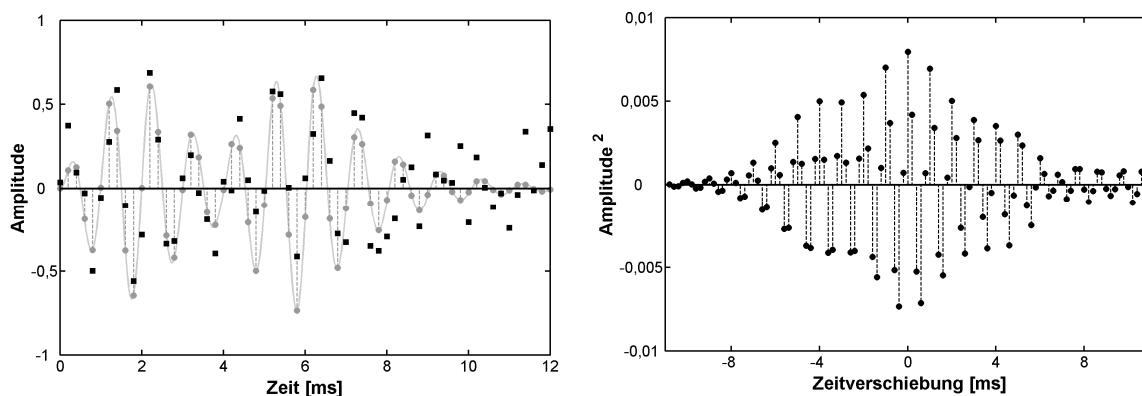


Abbildung 11: Links: Verrauschte Zeitreihe (schwarze Quadrate), die sich aus der Überlagerung des vorgegebenen gefilterten Zeitsignals (graue Linie mit grauen Punkten als Abtastwerte) mit weißem Rauschen ergibt. Die Amplitude des weißen Rauschens entspricht der halben Signalamplitude. Rechts: Kreuzkorrelationsfunktion zwischen dem diskreten unverrauschten und dem verrauschten bandpassgefilterten Signal.

Als ein Nachteil der harmonischen Signale zur Anwendung bei laufzeitomographischen Untersuchungen ist die Ähnlichkeit der Signale zu nennen. Die akustische Laufzeitomographie beruht darauf, dass akustische Signale von mehreren Schallsendern ausgesendet und an verschiedenen Mikrofonen empfangen werden. Um die Signale sicher einem Schallsender zuzuordnen ist es daher nötig, dem jeweiligen Signal eine spezielle Signatur aufzuprägen (verschiedene Frequenzen, verschiedene Pausenlängen). Weiterhin ist es möglich, die Signale zeitlich nacheinander zu senden oder bei der Wahl des Versuchsaufbaus darauf zu achten, dass sich die Längen der verschiedenen Schallstrecken derart unterscheiden, dass eine sichere Zuordnung der einzelnen Signaleinsätze zu einem speziellen Sender-Empfängerpaar gewährleistet ist.

### 3.3.2. Chirpsignale

Neben akustischen Signalen mit fester Frequenz bieten sich breitbandige Signale zur Laufzeitbestimmung an, deren Energiegehalt auf einen weiten Frequenzbereich verteilt ist.

Als Vertreter harmonischer breitbandiger Signale soll der lineare Chirp vorgestellt werden, der auch als Gleitsinus oder Sweep bezeichnet wird (Abbildung 12). Eine Beschreibung dieses Signals kann mit der Beziehung

$$f_i(t) = f_0 + \beta t \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{f_1 - f_0}{t_{\text{Sig}}} \quad (3.17)$$

erfolgen. Hierbei wird der Frequenzbereich, welcher während der Signaldauer  $t_{\text{Sig}}$  durchlaufen wird, durch die untere Grenzfrequenz  $f_0$  und die obere Grenzfrequenz  $f_1$  abgegrenzt. Das Gesamtsignal, von welchem in Abbildung 12 (links) ein Ausschnitt dargestellt ist, hat eine Gesamtlänge von 0,2 s und enthält Frequenzen im Bereich von 10 Hz bis 5 kHz. Die lineare Frequenzänderung wird in einer Zeitreihendarstellung deutlich. Zur Veranschaulichung der im gesamten Signal enthaltenen Frequenzanteile wurde das nach Gleichung (3.15) berechnete Betragsspektrum in Abbildung 12 (rechts) dargestellt.

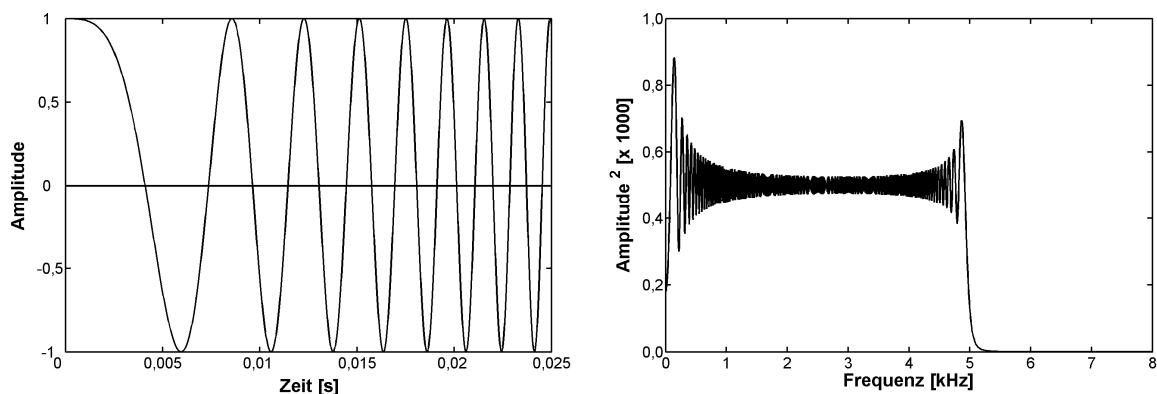


Abbildung 12: Linearer Chirp mit Frequenzanteilen zwischen 10 Hz und 5 kHz und einer Signallänge von 0,2 s. Links: Ausschnitt aus dem zeitlichen Verlauf des linearen Chirps, rechts: Powerspektrum des gesamten Signals.

Die Autokorrelationsfunktion des linearen Chirpsignals ist in Abbildung 13 dargestellt. Es ist ein deutliches Maximum bei einer Verschiebung von 0 ms erkennbar, womit eine gute Voraussetzung zur Laufzeitbestimmung der Signale gegeben ist. Je größer dabei das Verhältnis der Höhe des Maximums zur Höhe der Nebenmaxima ist, desto sicherer kann die Laufzeit bestimmt werden. Eine Verbreiterung des Frequenzbandes, welches bei der Erzeugung des Gleitsinus genutzt wird, bewirkt dabei eine Erhöhung dieses Verhältnisses. Die obere Grenze des nutzbaren Frequenzbandes wird durch die Abtastfrequenz des Signals begrenzt und ist gleich der Nyquistfrequenz (vgl. Gleichung (3.14)).

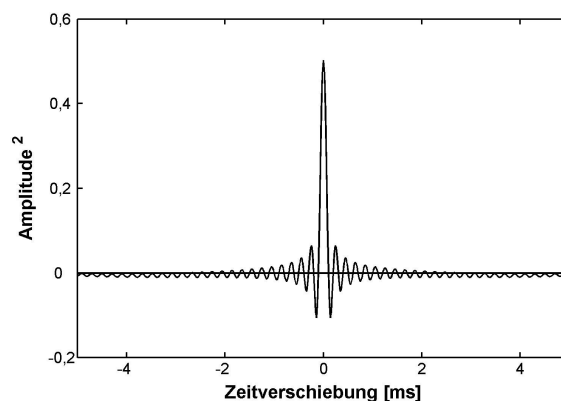


Abbildung 13: Autokorrelationsfunktion eines linearen Chirpsignals mit Frequenzanteilen von 10 Hz bis 5 kHz und einer Signallänge von 0,2 s.

Ähnlich wie bei den harmonischen Signalen mit konstanter Frequenz kann die fehlende Differenzierbarkeit ein Nachteil von Chirpsignalen für deren Anwendung bei der akustischen Laufzeittomographie sein. Um ein eindeutiges Korrelationsergebnis (deutliches Maximum) zu erhalten, ist es nötig, bei der Signalerzeugung einen möglichst großen Frequenzbereich zu verwenden. Dies wiederum beschränkt die Möglichkeit, verschiedenste Signale zu generieren, die auch bei gleichzeitigem Senden sicher unterschieden werden können.

### 3.3.3. Pseudostochastisches Rauschen mit maximaler Periodenlänge

Ein weiterer Vertreter breitbandiger Signale, der im Rahmen der akustischen Laufzeittomographie betrachtet werden soll, sind Maximallängenfolgen (engl. MLS: Maximum Length Sequences). Diese Signale sind pseudo-zufällige binäre (zweiwertige) Signale, die dem weißen Rauschen ähnlich sind und sich durch eine nahezu impulsförmige Autokorrelationsfunktion auszeichnen. Die positiven Eigenschaften dieser Folgen werden in verschiedenen Bereichen der Akustik genutzt. Anwendung finden Maximallängenfolgen zum Beispiel bei der Bestimmung von Impulsantworten akustischer Systeme bzw. deren Übertragungsfunktionen in der Raum- oder Bauakustik (s. z. B. Vorländer, 1994; Xiang, 1992) bzw. im Wasser (Farina, 1998), aber auch in der Radartechnik (Sachs, 1999). Die Betrachtung



tung der MLS zur Anwendung im Rahmen der akustischen Laufzeitomographie liegt in den positiven Korrelationseigenschaften dieser Folgen begründet, da deren periodische Autokorrelationsfunktion (PAKF) einem nahezu idealen Delta-Impuls (Dirac-Stoß, Fliege, 1991; Lüke, 1995) entspricht. Des Weiteren liefert die schnelle Hadamardtransformation (engl. FHT: Fast Hadamard Transformation, vgl. Kapitel 3.4.2) einen Algorithmus zur schnellen Berechnung der Korrelationsfunktion dieser zweiwertigen Signale.

Im folgenden Abschnitt soll die Erzeugung von Maximallängenfolgen erläutert und deren Eigenschaften beschrieben werden. Ausführlichere Abhandlungen zu den Maximallängenfolgen finden sich zum Beispiel bei Golomb (1982), Lüke (1992) oder Finger (1997).

Die Theorie zur Erzeugung der Maximallängenfolgen basiert auf der Mathematik der Galois-Felder. Diese Körper sind algebraische Strukturen, in denen Rechenoperationen wie Addition, und Multiplikation definiert sind, wobei Kommutativität, Assoziativität, Distributivität und Abgeschlossenheit des Körpers erfüllt sein müssen. Ein Galois-Feld  $GF(B)$  besteht dabei aus einer endlichen Anzahl  $K$  zahlenwertig unterschiedlicher Elementen, wobei  $B$  die Ordnung des Galois-Feldes charakterisiert und prim ist.

Das einfachste Galois-Feld ist  $GF(2)$  mit den zwei Elementen  $\{0; 1\}$  und den Rechenoperationen Modulo-2-Addition ( $\oplus_2$ ) und Modulo-2-Multiplikation ( $\otimes_2$ ). Die Ergebnisse dieser Operationen im  $GF(2)$  sind wie folgt festgelegt

$$\begin{array}{c|cc} \oplus_2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{c|cc} \otimes_2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \quad (3.18)$$

Um binäre Folgen zu erzeugen, deren Periodenlänge maximal ist, sind lineare Polynome in  $GF(2)$  grundlegend. Ein lineares Polynom  $p(x)$  vom Grad  $m$  hat die allgemeine Form

$$p(x) = c_m x^m + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = \sum_{i=0}^m c_i \cdot x^i \quad \text{mit } c_m \neq 0, \quad (3.19)$$

wobei  $c_i, x \in GF(2)$  und die Operationen Multiplikation und Addition jeweils modulo 2 (vgl. (3.18)) gelten (Lüke, 1992).

Für jeden Grad  $m$  in  $GF(2)$  existieren insgesamt  $2^m$  verschiedene Polynome nach Gleichung (3.19). Viele dieser Polynome lassen sich jedoch als Produkte von Polynomen geringeren Grades darstellen. Kann ein Polynom nicht in einzelne Faktoren zerlegt werden, wird es als irreduzibel bezeichnet. Von diesen sind aber wiederum nur die sogenannten primitiven Polynome geeignet, um Maximallängenfolgen zu erzeugen. Eine explizite Berechnung dieser primitiven Polynome ist nicht möglich, sie können jedoch durch ein Suchverfahren bestimmt werden. Hierfür werden aus den Polynomen Folgen erzeugt und diese hinsichtlich maximaler Periodenlänge untersucht (Lüke, 1992).

Die bekanntesten Tabellen irreduzibler und primitiver Polynome mit Elementen aus  $GF(2)$  finden sich in Peterson (1967, Anhang C). Hier sind für die Grade  $m=2 \dots 16$  alle irreduziblen Polynome aufgeführt und primitive Polynome gekennzeichnet. Für die Grade

$m=17 \dots 34$  ist eine Auswahl aufgelistet. Weiterhin gilt, dass das reziproke Polynom eines primitiven Polynoms wiederum primitiv ist (Peterson, 1967).

Die Erzeugung der gesuchten Maximallängenfolgen  $s(n)$  erfolgt mit einer rekursiven Bildungsvorschrift (Lüke, 1992)

$$s(n) = -\frac{1}{c_0} \sum_{i=1}^m c_i \cdot s(n-i), \text{ wobei } s(n), c_i \in GF(2) \text{ und } c_0, c_m \neq 0. \quad (3.20)$$

Da die Bildung der MLS in der Praxis meist mittels binärer rückgekoppelter Schieberegister (bzw. deren softwaretechnischer Realisierung) erfolgt, soll das Verfahren an einem solchen Schieberegister (vgl. Abbildung 14) erläutert werden. Ein solches Schieberegister besteht aus Speicher- bzw. Verzögerungseinheiten sowie aus Multiplikatoren zur Skalierung der Rückkopplungsglieder.

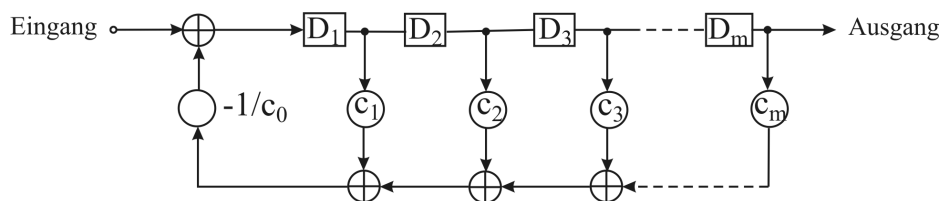


Abbildung 14: Lineares rückgekoppeltes Schieberegister der Ordnung  $m$  mit Skalierungsfaktoren  $c_i$  und Speicher- bzw. Verzögerungseinheiten  $D_i$ . Die Verknüpfung der Elemente erfolgt über eine Modulo-Addition ( $\oplus$ ). Zur Initialisierung (Eingang) kann zum Beispiel eine Dirac-Folge verwendet werden. Der Ausgang enthält die linear rekursive Folge  $s(n)$ . In  $GF(2)$  sind  $c_i \in \{0; 1\}$ ,  $c_0 = c_m = 1$  und  $\oplus$  entspricht der Addition modulo 2 (nach Lüke, 1992; Peterson, 1967).

Zu Beginn dürfen nicht alle Inhalte der Speicher- bzw. Verzögerungseinheiten  $D_i$  gleich 0 sein, damit sich eine nichtverschwindende Folge ausbilden kann. Die Umsetzung kann zum Beispiel durch das Anlegen eines Delta-Impulses am Eingang erfolgen, wodurch ein  $D_i \neq 0$  gegeben ist. Die Berechnung der Folgeelemente erfolgt durch Rückkopplung der Speichereinheiten, welche mit den Skalierungsfaktoren gewichtet werden, und deren Verknüpfung über eine Addition modulo 2 realisiert wird. Das neu berechnete Element wird im nächsten Schritt, bei dem die gesamte Folge um eine Einheit nach rechts verschoben wird, in  $D_i$  geschrieben. Das Schieberegister erzeugt so Takt für Takt aus  $m$  Folgeelementen jeweils ein neues Element der autonomen Signalfolge  $s(n)$ , die unabhängig von der Anfangsbedingung ist, und nur von der Wahl der Koeffizienten  $c_i \in GF(2)$  abhängt. Dabei unterscheiden sich Folgen, die mit denselben Koeffizienten  $c_i$  gebildet wurden, lediglich durch eine Verschiebung in Abhängigkeit von der Initialisierung der Speicherzellen (Finger, 1997).

Ist  $m$  die Länge (Ordnung) des Schieberegisters, können maximal

$$N = 2^m - 1 \quad (3.21)$$

von Null verschiedene Zustände des Registers vorliegen (Ausschluss der Nullfolge). Diese „maximale“ Periodenlänge der Folge wird jedoch nur bei einer geeigneten Rückkopplungsvorschrift erreicht. Notwendige und hinreichende Bedingung für maximale Periodenlänge einer linearen rekursiven Folge ist dabei ein primitives charakteristisches Polynom, d. h. die Skalierungsfaktoren  $c_i$  müssen so gewählt werden, dass sie den Koeffizienten eines primitiven Polynoms entsprechen.

Ein Beispiel soll diesen Rückkopplungsprozess zur Bildung einer MLS verdeutlichen. Gewählt wird ein primitives Polynom vom Grad 3 ( $m=3$ ) aus GF(2) (Lüke, 1992)

$$x^3 + x + 1. \quad (3.22)$$

Die Skalierungsfaktoren des Schieberegisters betragen folglich

$$c_i = (c_0, c_1, c_2, c_3) = (1, 1, 0, 1). \quad (3.23)$$

Die Initialisierung der Speicherelemente erfolgt mittels einer Impulsfolge, so dass

$$D_i = (D_1, D_2, D_3) = (0, 0, 1) \quad (3.24)$$

und alle weiteren Elemente, welche am Eingang anliegen, gleich Null sind.

Im nächsten Schritt erfolgt die Skalierung der Speicherelemente und die Verknüpfung der skalierten Werte mit einer Addition modulo 2, so dass sich das nächste Folgeelement  $s(4)$  berechnen lässt aus

$$s(4) = (D_3 \cdot c_3 \oplus_2 D_2 \cdot c_2 \oplus_2 D_1 \cdot c_1) \cdot \left( -\frac{1}{c_0} \right) \oplus_2 (\text{Eingang} = 0) \quad (3.25)$$

$$s(4) = (1 \cdot 1 \oplus_2 0 \cdot 0 \oplus_2 0 \cdot 1) \cdot (-1) \oplus_2 (0) = 1.$$

Die Speicherelemente werden nun nach rechts verschoben und das neu berechnete Element in  $D_1$  geschrieben. Die Folge selbst ergibt sich sukzessiv aus den Elementen aus  $D_3$ . Die weiteren Berechnungen zur Generierung der vollständigen MLS zum primitiven Polynom aus Gleichung (3.22) sind in Tabelle 4 zusammengefasst.

Nach einer Periode von 7 Takten wiederholt sich die Speicherzellenbelegung (Takt 8 ist identisch mit dem ersten Takt). Die maximale Periodenlänge von  $2^m - 1 = 2^3 - 1 = 7$  ist somit erreicht. Die erzeugte Folge maximaler Periodenlänge (Belegung der Speicherzelle  $D_3$ ) hat folgende Form

$$s(n) = (1, 0, 0, 1, 1, 1, 0). \quad (3.26)$$

Tabelle 4: Berechnung einer linear rekursiven Folge mittels Schieberegister.

Takt	Speicherbelegung ( $D_1, D_2, D_3$ )	Multiplikation mit ( $c_1, c_2, c_3$ )=(1, 0, 1)	Rückkopplung (vgl. Glg. (3.25))
1	(0, 0, 1)	(0, 0, 1)	1
2	(1, 0, 0)	(1, 0, 0)	1
3	(1, 1, 0)	(1, 0, 0)	1
4	(1, 1, 1)	(1, 0, 1)	0
5	(0, 1, 1)	(0, 0, 1)	1
6	(1, 0, 1)	(1, 0, 1)	0
7	(0, 1, 0)	(0, 0, 0)	0
8	(0, 0, 1)		

Bei vielen praktischen Anwendungen ist es von Vorteil, die binäre unipolare Sequenz (Wertebereich  $\{0, 1\}$ ) in eine bipolare Sequenz (Wertebereich  $\{-1, 1\}$ ), symmetrisch um 0, umzuwandeln. Die Zuordnung erfolgt dabei entsprechend

$$\{0,1\} \leftrightarrow \{+1,-1\} \quad (3.27)$$

(Sarwate und Pursley, 1980; Cohn und Lempel, 1977).

Als weiteres Beispiel ist in Abbildung 15 eine bipolare Maximallängenfolge vom Grad 5 dargestellt. Das zugrunde liegende primitive Polynom hat die Form  $x^5 + x^2 + 1$ . Ebenfalls abgebildet ist das zugehörige Betragsspektrum nach Gleichung (3.15), welches die Ähnlichkeit der Signalfolge zum weißen Rauschen mit konstanten Frequenzanteilen widerspiegelt.

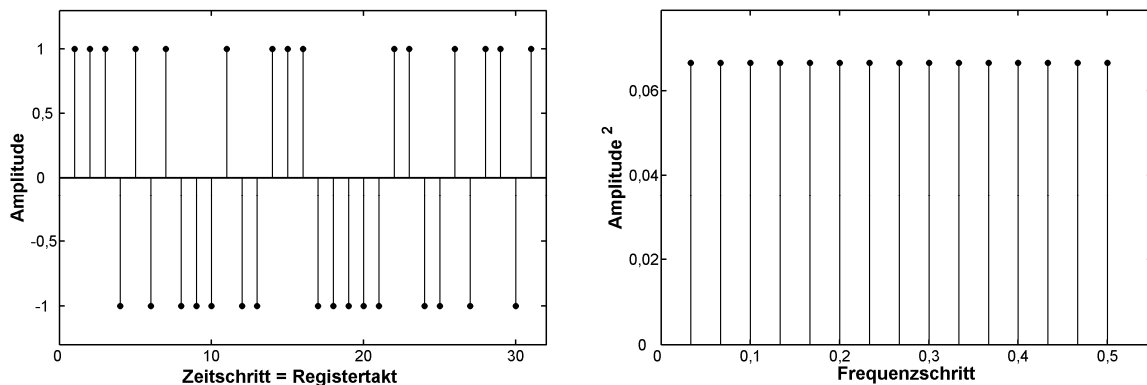


Abbildung 15: Maximallängenfolge vom Grad 5, welche durch ein rückgekoppeltes Schieberegister beruhend auf dem primitiven Polynom  $x^5 + x^2 + 1$  erzeugt wurde (links) sowie deren Betragsspektrum (rechts).

Im folgenden Abschnitt sollen die Charakteristika der Maximallängenfolgen bezüglich ihrer Korrelationseigenschaften zusammengefasst werden. Eine entscheidende Größe ist

hierbei die normierte periodische Autokorrelationsfunktion (PAKF). Diese ist für eine Folge  $s(n)$  mit einer Länge  $N$  (und der entsprechenden Periode  $N$ ) nach Lücke (1992) definiert als

$$r_{\text{PAKF}}(m \cdot \Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n) s[(n+m) \bmod N], \quad (3.28)$$

wobei  $(n+m) \bmod N$  den Rest nach der Division von  $(n+m)$  durch  $N$  bezeichnet.

Für Maximallängenfolgen ist diese PAKF eine zweiwertige Folge mit den Werten (Schroeder, 1979; Borish und Angell, 1983; Finger, 1997)

$$r_{\text{PAKF}}(m \cdot \Delta t) = \begin{cases} 1 & \text{für } m = 0 \\ -\frac{1}{N} & \text{für } m \neq 0 \end{cases} \text{ jeweils (mod } N). \quad (3.29)$$

Dabei ist zu bemerken, dass sich die Form der PAKF mit wachsender Folgenlänge immer weiter einem idealen Dirac-Impuls nähert. Im Gegensatz zur periodischen Autokorrelationsfunktion, unterscheidet sich die aperiodische Autokorrelationsfunktion gemäß Gleichung (3.7), mit  $y=x$ , durch nicht konstante Korrelationswerte bei Verschiebungen ungleich Null (vgl. Abbildung 16). Dennoch ist ein deutliches Maximum bei einer zeitlichen Verschiebung von 0 Taktschritten erkennbar. Diese Eigenschaft stellt die Anwendbarkeit dieser Signale zur Laufzeitbestimmung sicher.

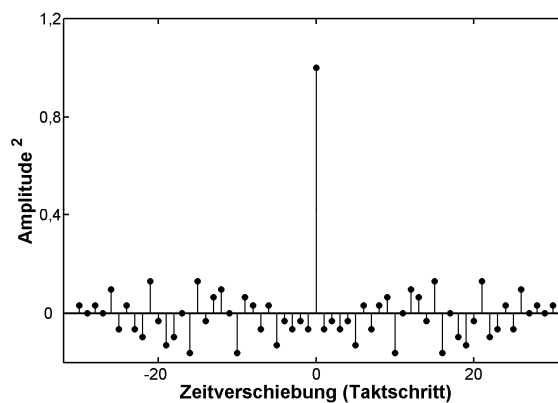


Abbildung 16: Autokorrelationsfunktion der Maximallängenfolge vom Grad 5 aus Abbildung 15.

Im Hinblick auf die Anwendung der Maximallängenfolgen als Anregungssignale bei der akustischen Laufzeitomographie gibt es neben der nahezu idealen Autokorrelationsfunktion, welche einem Impuls ähnelt, weitere Vorteile. Die Erzeugung der MLS kann sehr flexibel geschehen und die Länge der Folgen an das spezifische Messproblem angepasst werden. Hierfür wurden zahlreiche primitive Polynome für die Grade 2 bis 17 und eine Auswahl bis zum Grad 22 hinterlegt, auf welche zur Erzeugung einer MLS bei der aktuellen Messaufgabe zurückgegriffen werden kann. Neben der Flexibilität bei der Erzeugung der Maximallängenfolgen bieten diese Signalmuster die Möglichkeit, auch unter widrigen Be-

dingungen (schlechtes Verhältnis von Signal zu Rauschen) korrekte Ergebnisse zu liefern (z.B. Sachs et al., 1997). Hierfür wird die Periodizität der Signale ausgenutzt. Eine Mittelung der Messergebnisse über mehrere Periodenlängen führt zu einer Addition der Amplituden der (kohärenten) Nutzsignale (6 dB pro Verdopplung), während sich die Störsignale, wenn sie nicht mit der MLS korreliert sind, energetisch akkumulieren (3 dB pro Verdopplung) (Kob und Vorländer, 1996). Dies führt zu einer effektiven Verbesserung des Verhältnisses von Signal zu Rauschen (S/N), setzt aber voraus, dass das System während der gesamten Messung in einem stationären Zustand verharrt. Untersuchungen des Einflusses meteorologischer Parameter (Temperaturänderungen, Windfluktuationen) auf die Anwendung von Maximallängenfolgen bei akustischen Messungen zeigen, dass realistische Bedingungen mit kleinen Variationen dieser Parameter nur einen sehr geringen Einfluss auf das Ergebnis von Messungen mit MLS haben (Vorländer und Bietz, 1995; Kob und Vorländer, 1996).

Ein weiterer Vorteil der MLS ist die Möglichkeit, verschiedene Folgen (aus verschiedenen charakteristischen primitiven Polynomen) zu generieren und gleichzeitig auszusenden. Aufgrund der Eigenschaften der MLS ist eine Auflösung der Laufzeiten mittels Kreuzkorrelation auch bei Überlagerung unterschiedlicher Folgen möglich.

Zur Verdeutlichung dieser Tatsache wurden zwei unterschiedliche Maximallängenfolgen überlagert. Die erste Folge entspricht dabei der MLS aus Abbildung 15. Die zweite Folge wurde aus dem reziproken primitiven Polynom der ersten Folge ( $x^5 + x^3 + 1$ ) gebildet. Die Überlagerung erfolgte durch Amplitudenaddition und anschließende Skalierung der Amplituden auf den ursprünglichen Wertebereich. Um einen Laufzeitunterschied zwischen beiden Signalen nachzubilden, erfolgte eine zeitliche Verschiebung der zweiten Folge um 15 Datenpunkte nach rechts, während die erste Folge erhalten blieb. Bei der Simulation wurde nur eine Periode der jeweiligen Folge genutzt und keine Hintergrundgeräusche zugelassen. Die Ergebnisse der Kreuzkorrelation der einzelnen Folgen mit dem überlagerten Signal sind in Abbildung 17 dargestellt. Deutlich sichtbar ist das Maximum der KKF für beide Folgen, ohne dabei maßgeblich durch die Überlagerung mit der anderen Folge beeinflusst zu sein. Lediglich der Amplitudenwert der KKF hat sich im Vergleich zur AKF (vgl. Abbildung 16) verringert.

Xiang und Schröder (2003) geben an, dass bei einer Überlagerung von Maximallängenfolgen in Abhängigkeit von der gewählten Folge lediglich eine Verringerung des S/N der KKF um mindestens 3 dB zu erwarten ist. Insbesondere aus diesem Grund schlagen Xiang und Schröder (2003) bzw. Xiang et al. (2005) in ihren Arbeiten explizit die Anwendung der MLS als Anregungssignale für akustisch tomographische Untersuchungen vor.

Die Anwendbarkeit eines schnellen Algorithmus zur Berechnung der Kreuzkorrelationsfunktion (FHT, vgl. Kap. 3.4.2) bietet einen weiteren Vorteil hinsichtlich des Einsatzes der binären Maximallängenfolgen zur Laufzeitbestimmung.

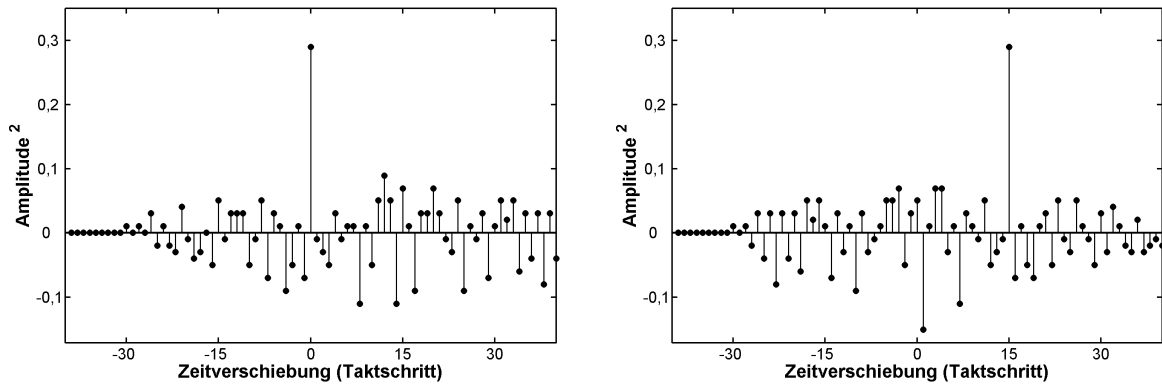


Abbildung 17: Kreuzkorrelationsfunktionen nach Überlagerung von zwei Maximallängenfolgen mit reziproken charakteristischen primitiven Polynomen. Links: KKF des überlagerten Signals mit der unverschobenen ersten MLS, rechts: KKF des überlagerten Signals mit der um 15 Datenpunkte nach rechts verschobenen zweiten MLS.

### 3.4. Berechnung der Korrelationsfunktion

Die Berechnung der Kreuzkorrelationsfunktion (KKF) zweier diskreter Signale im Zeitraum nach Gleichung (3.7) bzw. (3.9) benötigt eine Rechenzeit, die proportional zu  $N^2$ , der Anzahl der Multiplikationen der beiden Signale, ist. In den folgenden Abschnitten werden zwei Verfahren vorgestellt, mit denen die Berechnung der KKF beschleunigt werden kann. Zunächst wird die Anwendung der Fouriertransformation (FT) zur Berechnung der KKF beschrieben. Die Optimierung hinsichtlich des Rechenaufwandes ergibt sich hierbei durch die Anwendung eines schnellen Algorithmus zur FT. Das darauf folgende Kapitel beschäftigt sich mit der Anwendung der schnellen Hadamardtransformation zur Berechnung der KKF.

#### 3.4.1. Schnelle Fouriertransformation

Zur Berechnung der Kreuzkorrelationsfunktion unter Verwendung der Fouriertransformation (Kap. 3.2), wird Gleichung (3.1) entsprechend Gleichung (3.10) in den Frequenzraum transformiert. Man erhält

$$\begin{aligned}
 R_{x,y}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t+\tau) dt \right] e^{-2\pi i f \tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} y(t+\tau) \cdot e^{-2\pi i f \tau} d\tau \right] dt
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Mit der Substitution  $t + \tau = \zeta$  kann das innere Integral in (3.30) geschrieben werden als

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t+\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\zeta) e^{-2\pi i f (\zeta-t)} d\tau = Y(f) e^{2\pi i f t}. \tag{3.31}$$

Hierbei bezeichnet  $Y(f)$  die Fouriertransformierte der Funktion  $y(t)$ .

Die Fouriertransformierte der Kreuzkorrelationsfunktion  $R_{x,y}(f)$  ergibt sich somit zu

$$R_{x,y}(f) = \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{2\pi i f t} dt \right) Y(f) = X^*(f) Y(f). \quad (3.32)$$

Hierbei kennzeichnet  $X(f)$  die Fouriertransformierte der Funktion  $x(t)$  und  $X^*(f)$  das konjugiert Komplexe von  $X(f)$ .

Die Fouriertransformierte der Kreuzkorrelation im Zeitbereich entspricht dem Produkt aus den Fouriertransformierten der Zeitreihen im Frequenzbereich

$$r_{x,y}(t) \Leftrightarrow X^*(f) Y(f). \quad (3.33)$$

Wie bereits erwähnt, beansprucht die Berechnung der Kreuzkorrelationsfunktion im Zeitraum  $N^2$  Multiplikationen, wobei  $N$  der Länge der Zeitsignale entspricht. Für die Berechnungen im Frequenzraum müssen die Zeitsignale fouriertransformiert, multipliziert und im Anschluss das Produkt wieder in den Zeitraum überführt werden. Ein schneller Algorithmus für diese Transformationen zwischen Zeit- und Ortsraum liefert die schnelle Fouriertransformation (FFT – Fast Fourier Transformation, Brigham, 1992). Diese stellt eine spezielle numerische Realisierung der diskreten Fouriertransformation dar, wobei vorausgesetzt wird, dass die Länge des Zeitsignals  $N$  eine bestimmte Länge

$$N = 2^k \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.34)$$

aufweist. Der Vorteil dieses Verfahrens liegt in der Optimierung der Rechenzeit. Während man für eine diskrete FT  $N^2$  Rechenschritte benötigt, verringert sich diese Zahl bei der Durchführung der Transformation mittels FFT auf einen Wert von  $N \log_2 N$ .

Für die gesamte Berechnung der Kreuzkorrelationsfunktion mittels FFT wird somit eine Rechenzeit proportional  $3N \log_2 N$  für die Transformationen und  $N$  für die Multiplikation im Frequenzraum beansprucht und beträgt insgesamt  $N(3 \log_2 N + 1)$ .

### 3.4.2. Schnelle Hadamardtransformation

Eine schnelle Methode zur Berechnung der Kreuzkorrelationsfunktion im Zeitbereich für Maximallängenfolgen (vgl. Kapitel 3.3.3), deren Amplituden lediglich die Werte +1 und -1 annehmen, liefert die schnelle Hadamardtransformation (FHT – Fast Hadamard Transformation).

Im Folgenden sollen die Grundzüge der FHT im Hinblick auf die Berechnung der (periodischen) Kreuzkorrelationsfunktion wiedergegeben werden. Ausführliche Beschreibungen geben z.B. Cohn und Lempel (1977), Borish und Angell (1983) oder Xiang und Schröder (2003).

Die Geschwindigkeit des Algorithmus beruht auf der Tatsache, dass bei symmetrischen zweiwertigen Signalen zur Berechnung der Kreuzkorrelationsfunktion nach Gleichung



(3.7) bzw. (3.9) lediglich Additionen und Subtraktionen durchgeführt werden, jedoch keine rechenzeitaufwendigen Multiplikationen.

Dabei wird zunächst Gleichung (3.9) in Matrixschreibweise überführt

$$\mathbf{r}_{x,y} = \underline{\mathbf{X}}_n \cdot \mathbf{y}. \quad (3.35)$$

Hierbei sind  $\mathbf{r}_{x,y}$  und  $\mathbf{y}$  Vektoren der KKF bzw. des empfangenen Signals.  $\underline{\mathbf{X}}_n$  entspricht einer Matrix, welche sich aus rechtsseitigen zeitlichen zyklischen Verschiebungen des ausgesendeten zweiwertigen Signals  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  mit  $x_i \in \{-1; +1\}$  zusammensetzt

$$\underline{\mathbf{X}}_n = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_n & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2 & \cdots & x_n & x_1 \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Die Matrix  $\underline{\mathbf{X}}_n$  kann in ein Matrixprodukt umgeformt werden (Borish und Angell, 1983), wobei  $n = 2^m - 1$  mit  $m \in \mathbb{N}$

$$\underline{\mathbf{X}}_n = \underline{\mathbf{P}}_2 \underline{\mathbf{S}}_2 \underline{\mathbf{H}}_{n+1} \underline{\mathbf{S}}_1 \underline{\mathbf{P}}_1. \quad (3.37)$$

Kern dieser Umformung ist die orthogonale zweiwertige ( $\pm 1$ ) quadratische  $(n+1)$  Hadamard-Matrix  $\underline{\mathbf{H}}_{n+1}$ , deren Beschreibung auf die Arbeit von Hadamard (1893) zurückgeht.  $\underline{\mathbf{P}}_1$  und  $\underline{\mathbf{P}}_2$  sind Permutationsmatrizen der Größe  $(n, n)$ , welche Spalten bzw. Zeilen der Hadamard-Matrix vertauschen. Die Matrizen  $\underline{\mathbf{S}}_1$  und  $\underline{\mathbf{S}}_2$  sind vom Typ  $(n+1, n)$  bzw.  $(n, n+1)$ . Sie bewirken, dass die erste Spalte bzw. die erste Zeile der Hadamard-Matrix gelöscht werden, wodurch eine quadratische Matrix mit  $n$  Zeilen und  $n$  Spalten entsteht.

Eine Hadamard-Matrix  $\underline{\mathbf{H}}_{n+1}$  besteht aus  $(n+1)$  Zeilen und Spalten und erfüllt folgende Beziehung

$$\underline{\mathbf{H}}_{n+1} \underline{\mathbf{H}}_{n+1}^T = (n+1) \underline{\mathbf{I}} \quad (3.38)$$

Hier stellen  $\underline{\mathbf{I}}$  die Einheitsmatrix und  $\underline{\mathbf{H}}^T$  die transponierte Matrix von  $\underline{\mathbf{H}}$  dar. Die Bildung einer Hadamard-Matrix erfolgt rekursiv, wobei  $(n+1) = 2^m$  mit  $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{H}}_1 &= [1] \\ \underline{\mathbf{H}}_{2i} &= \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{H}}_i & \underline{\mathbf{H}}_i \\ \underline{\mathbf{H}}_i & \underline{\mathbf{H}}_{-i} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Die Hadamard-Matrix  $\underline{\mathbf{H}}_4$  hat somit die Gestalt

$$\underline{\mathbf{H}}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Zur Bestimmung der KKF mittels FHT substituiert man (3.37) in (3.35) und erhält folgenden Ausdruck

$$\mathbf{r}_{x,y} = \underline{\mathbf{P}}_2 \underline{\mathbf{S}}_2 \underline{\mathbf{H}}_{n+1} \underline{\mathbf{S}}_1 \underline{\mathbf{P}}_1 \mathbf{y}. \quad (3.41)$$

Die Berechnung der Permutationsmatrizen  $\underline{\mathbf{P}}_1$  und  $\underline{\mathbf{P}}_2$  erfolgt bei Betrachtung von (3.37) nach

$$\underline{\mathbf{P}}_2^{-1} \underline{\mathbf{X}}_n \underline{\mathbf{P}}_1^{-1} = \underline{\mathbf{G}}_n = \underline{\mathbf{S}}_2 \underline{\mathbf{H}}_{n+1} \underline{\mathbf{S}}_1. \quad (3.42)$$

Die rechte Seite von Gleichung (3.42) entspricht der Hadamard-Matrix  $\underline{\mathbf{H}}_{n+1}$ , deren erste Zeile und Spalte gelöscht wurden. Die Permutationsmatrizen  $\underline{\mathbf{P}}_1$  bzw.  $\underline{\mathbf{P}}_2$  sind nun derart zu wählen, dass die Matrix  $\underline{\mathbf{X}}_n$  durch Vertauschen von Spalten ( $\underline{\mathbf{P}}_1$ ) bzw. Zeilen ( $\underline{\mathbf{P}}_2$ ) in die Matrix  $\underline{\mathbf{G}}_n$  überführt wird. Hierbei wird die Eigenschaft von Hadamard-Matrizen genutzt, wonach sich diese in Faktoren  $\underline{\mathbf{B}}_{n+1}$  und  $\underline{\mathbf{B}}_{n+1}^T$  zerlegen lassen (Cohn und Lempel, 1977; Lempel, 1979)

$$\underline{\mathbf{H}}_{n+1} = \underline{\mathbf{B}}_{n+1} \cdot \underline{\mathbf{B}}_{n+1}^T. \quad (3.43)$$

$\underline{\mathbf{B}}_{n+1}$  ist eine Matrix vom Typ  $(n+1, m)$  und entspricht der binären Repräsentation (bin: Binärzahl, dez: Dezimalziffern) der fortlaufenden Zeilen- bzw. Spaltennummer der Hadamard-Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n+1 \end{pmatrix}_{dez} \Rightarrow \underline{\mathbf{B}}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ & & & \vdots & \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{bin}. \quad (3.44)$$

Die Berechnung der Permutationsmatrix  $\underline{\mathbf{P}}_1$  zur Vertauschung der Spalten erfolgt unter Betrachtung der ersten  $m$  Zeilen der Signalmatrix  $\underline{\mathbf{X}}_n$ . Die binären Inhalte werden in Dezimalwerte umgerechnet und entsprechen dem Permutationsindex für die entsprechende Spalte der Signalmatrix.

Die Bestimmung von  $\underline{\mathbf{P}}_2$  erfolgt ähnlich. Nachdem die Spalten der Signalmatrix entsprechend  $\underline{\mathbf{P}}_1$  vertauscht wurden, werden die Spalten  $2^i$ , mit  $i = 0 \dots m$  der vertauschten Signalmatrix betrachtet und deren binäre Inhalte in Dezimalwerte umgerechnet. Diese Werte spiegeln die Permutationsmatrix  $\underline{\mathbf{P}}_2$  wider. Ein Beispiel für die Bestimmung der Permutationsmatrizen ist in Anhang A gegeben.

Es gibt für jede Maximallängenfolge (MLS) ein festes Permutationsmatrizenpaar  $\underline{\mathbf{P}}_1$  und  $\underline{\mathbf{P}}_2$  zur Anwendung bei der Berechnung der Kreuzkorrelationsfunktion mittels FHT nach Gleichung (3.41). Analog zur Bereitstellung der primitiven Polynome bei der Erzeugung der MLS (vgl. Kapitel 3.3.3) können diese Permutationsmatrizen zu jeder MLS berechnet und für Anwendungszwecke als Datensatz hinterlegt werden.

Die Berechnung der Hadamardtransformation erfolgt unter Einsatz eines schnellen Algorithmus, wofür lediglich  $N \log_2 N$  Rechenschritte benötigt werden (Yarlagadda und Hershey, 1997; Gumas, 1997). Zur Berechnung der Kreuzkorrelationsfunktion mittels FHT müssen zusätzlich Zeilen und Spalten der Signalmatrix vertauscht werden.

### 3.4.3. Vergleich des Rechenzeitaufwandes

Zur Abschätzung des Rechenzeitaufwandes für die Berechnung der Kreuzkorrelationsfunktion mittels FFT und FHT wurden die Kreuzkorrelationsfunktionen (KKF) von Maximallängenfolgen der Grade 2 bis 18 berechnet. Für die Berechnung der KKF unter Verwendung der FFT wurde eine Funktion der Programmiersprache MATLAB der Firma The Mathworks<sup>1</sup> (`xcorr.m`) angewendet. Bei der Fouriertransformation innerhalb dieser Funktion wird auf die Programmbibliothek FFTW (FFTW, 2006) zurückgegriffen, wodurch die Geschwindigkeit zur Berechnung der diskreten Fouriertransformation im Vergleich zu den meisten anderen Algorithmen zur Berechnung der FFT deutlich übertroffen wird.

Die Berechnung der KKF mittels FHT erfolgte ebenfalls in MATLAB mit einem Algorithmus nach Gumas (1997), nachdem die Permutationsmatrizen separat berechnet wurden. Die Analysen zum Rechenzeitbedarf, deren Ergebnisse in Abbildung 18 dargestellt sind, erfolgten auf einem Notebook mit Intel Pentium M Prozessor (1500 MHz) und 512 MB RAM mit der Programmversion MATLAB 6.5 (Release 13). Das Verhältnis für die Rechenzeit zur Berechnung der KKF mittels FHT bzw. FFT war dabei für MLS-Grade ab 10 nahezu konstant und betrug zwischen 0,5 und 0,7. Untersuchungen auf anderen Rechnern bestätigen dieses Ergebnis, obgleich die absoluten Zeiten variierten.

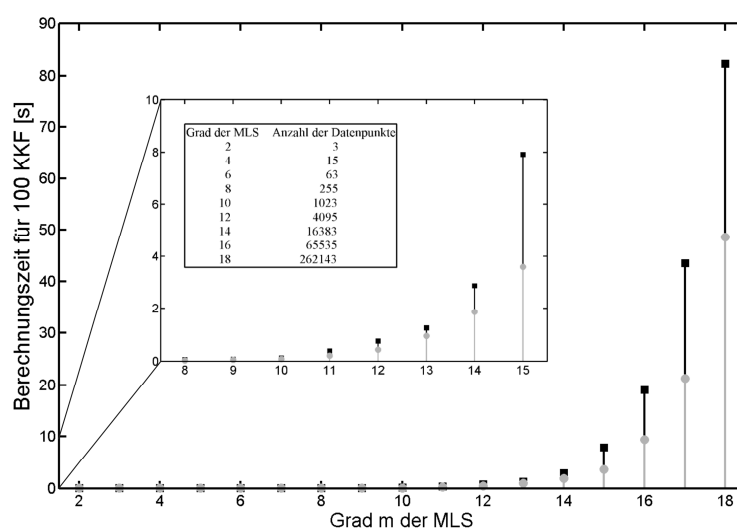


Abbildung 18: Zeitaufwand zur Berechnung von 100 Kreuzkorrelationsfunktionen von Maximallängenfolgen mittels FHT (graue Kreise) und FFT (schwarze Quadrate) mittels PC. Die zweite (innere) Abbildung zeigt den Bereich bis zu einem Grad der MLS von 15 mit einer höheren zeitlichen Auflösung.

<sup>1</sup> The MathWorks, Inc., 3 Apple Hill Drive, Natick, MA 01760-2098, United States.

Die Untersuchung des Rechenzeitaufwandes zeigt deutlich, dass die Berechnung der KKF unter Verwendung der FHT insbesondere für lange MLS und unter der Bedingung, dass eine große Anzahl von Kreuzkorrelationen berechnet werden müssen, eine deutliche Zeitersparnis im Vergleich zur Berechnung der KKF mittels FFT erlaubt.

### 3.5. Rekonstruktion abgetasteter Signale

Die Erfassung und Aufzeichnung analoger Schallsignale erfolgt durch Abtastung in diskreten Zeitschritten  $\Delta t$ . Beim Einsatz digitaler Messkarten ist dieser Zeitschritt durch die Abtastfrequenz der Messkarte nach Gleichung (3.8) bestimmt. Die Genauigkeit zur Auflösung der Schalllaufzeit mittels Korrelationsberechnung ist nach Gleichung (3.9) ebenfalls an diesen Zeitschritt gebunden. Um das Ergebnis unabhängig von den Eigenschaften der Messhardware analysieren zu können und somit die Unsicherheiten bei der Laufzeitbestimmung zu verringern, werden Interpolationswerte zwischen den Abtastwerten bestimmt. Diese Aufgabe, die Erzeugung eines Analogsignals aus vorhandenen zeitdiskreten Werten, spielt eine zentrale Rolle in der Signalverarbeitung (Hoffmann, 1998).

Unter bestimmten Voraussetzungen kann ein zeitkontinuierliches Signal  $x(t)$  aus seinen Abtastwerten  $x(n \cdot \Delta t)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) exakt rekonstruiert werden. Dies ist mit Hilfe der Samplingreihe

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \text{si} \left[ \frac{\pi}{\Delta t} \cdot (t - n \cdot \Delta t) \right] \quad (3.45)$$

möglich (Hoffmann, 1998). Dabei kennzeichnet das Symbol  $\text{si}$  die in Abbildung 19 dargestellte Spaltfunktion (z. B. Fliege, 1991; Schrüfer, 1992; Hoffmann, 1998)

$$\text{si } x = \frac{\sin x}{x}. \quad (3.46)$$

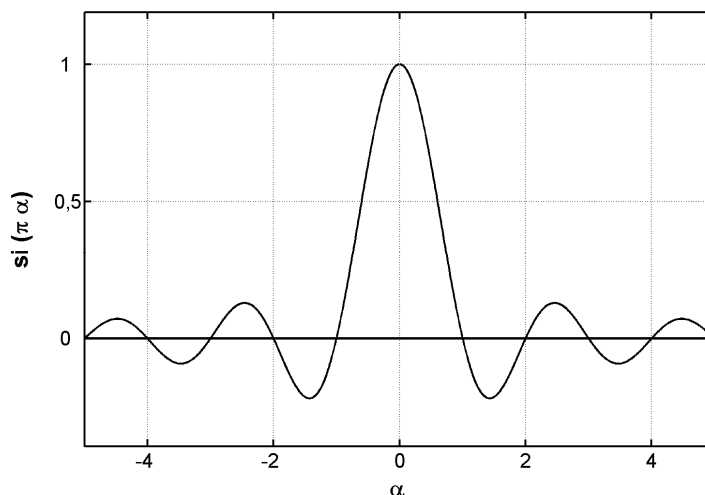


Abbildung 19: Spaltfunktion  $\text{si}(\pi \alpha)$ .

Die Interpolation mit Hilfe der Samplingreihe liefert eine bandbegrenzte Funktion, die sich dadurch auszeichnet, dass nur Frequenzbestandteile unterhalb einer oberen Begrenzungsfrequenz enthalten sind. Diese obere Grenze entspricht laut Abtasttheorem (vgl. Kapitel 3.2) genau der Nyquistfrequenz. Bei praktischen Anwendungen sind die akustischen Signale meist bandbegrenzt. Dies wird zum einen durch eine Frequenzbegrenzung des Signals selbst oder aufgrund einer Begrenzung durch das Übertragungssystem (Hardware) gewährleistet. Des Weiteren kann eine solche Begrenzung durch eine Tiefpassfilterung des Signals mit der Grenzfrequenz vor der Digitalisierung erzwungen werden (Hoffmann, 1998). Bei der praktischen Anwendung der Samplingreihe zur Interpolation von Abtastwerten sowie zur softwaretechnischen Weiterverarbeitung wird keine kontinuierliche Funktion  $x(t)$ , sondern eine Folge mit höherer zeitlicher Auflösung als das ursprünglich abgetastete Signal erzeugt. Hierfür werden aus den original abgetasteten Signalwerten Zwischenwerte zwischen den einzelnen Abtastwerten berechnet. Dabei wird die zeitliche Auflösung des mit der Samplingreihe interpolierten Signals mit  $\Delta t_s$  bezeichnet. Nach Gleichung (3.45) ergibt sich für das diskrete interpolierte Signal  $x(k \cdot \Delta t_s)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) der Zusammenhang

$$x(k \cdot \Delta t_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \text{si} \left[ \frac{\pi}{\Delta t} \cdot (k \cdot \Delta t_s - n \cdot \Delta t) \right]. \quad (3.47)$$

Betrachtet man das Verhältnis der Zeitschritte

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_s} = Q, \quad (3.48)$$

lässt sich Gleichung (3.47) schreiben als

$$x(k \cdot \Delta t_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \text{si} \left[ \pi \cdot \left( \frac{k}{Q} - n \right) \right]. \quad (3.49)$$

Mit dieser Formel ist die exakte Berechnung der Zwischenwerte möglich. Allerdings muss das Summationsintervall der Abtastwerte dafür von  $-\infty$  bis  $+\infty$  verlaufen. In der Realität wird dies bereits durch die Endlichkeit des Beobachtungszeitraumes beschränkt. Für endlich viele Abtastwerte im Intervall von  $k-K$  bis  $k+K$  ergibt sich die Samplingreihe daher zu

$$x(k \cdot \Delta t_s) \approx \sum_{n=k-K}^{k+K} x(n \cdot \Delta t) \cdot \text{si} \left[ \pi \cdot \left( \frac{k}{Q} - n \right) \right]. \quad (3.50)$$

Das Ergebnis einer solchen Rekonstruktion ist für die Funktion  $f(x) = (\sin x)^2 + \sin x$  in Abbildung 20 dargestellt. Die rekonstruierte Funktion spiegelt in guter Näherung die vorgegebene Funktion wider. Die Wiedergabe der Abtastwerte erfolgt dabei exakt. Geringe Abweichungen ergeben sich aus der Beschränkung des Rekonstruktionsintervalls, welche insbesondere im Randbereich des rekonstruierten Signals auftreten. Bei der Interpolation ab-

getasteter Signale ist daher darauf zu achten, das Rekonstruktionsintervall möglichst weit um den für die Rekonstruktion interessanten Zeitbereich auszudehnen.

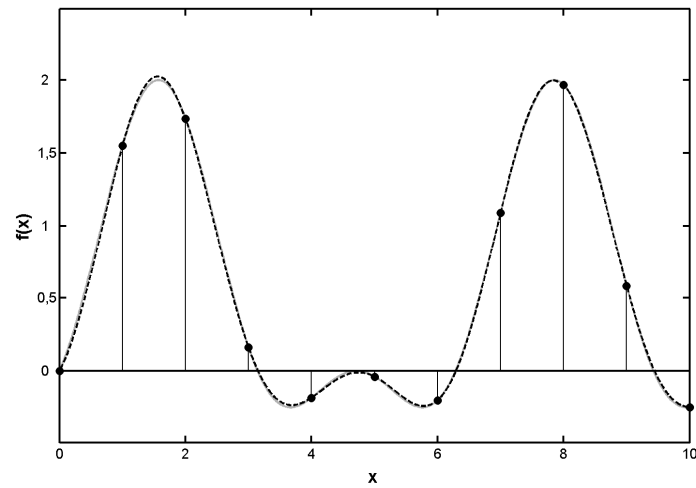


Abbildung 20: Rekonstruktion (gestrichelte schwarze Linie) des analogen Signals  $(\sin x)^2 + \sin x$  (graue Linie) aus Abtastwerten (Punkte) mit Hilfe der Samplingreihe.

## **4. Tomographie zur Darstellung von Verteilungen**

Als Tomographie bezeichnet man ein berührungsloses Messverfahren, bei welchem Informationen über den Zustand eines Untersuchungsgebietes bestimmt werden, ohne Sensoren direkt in das Gebiet einbringen zu müssen. Dieses Fernerkundungsverfahren beruht auf Messungen entlang verschiedener Wege durch das Gebiet. Als Messsignal dient eine Sondierungsenergie, welche bei Durchlaufen des Messgebietes mit dessen Eigenschaften in Wechselwirkung tritt und in Abhängigkeit von den vorherrschenden Bedingungen modifiziert wird. Die kombinierte Betrachtung von Messungen entlang verschiedener Ausbreitungswege durch das Messgebiet erlaubt im Anschluss die Rekonstruktion der räumlichen Verteilungen bestimmter Parameter innerhalb des Messgebietes.

Tomographische Verfahren können für verschiedenste Messaufgaben angewendet werden, bei denen die zerstörungsfreie Untersuchung eines Messobjektes gewünscht und eine Darstellung von Verteilungen innerhalb des Messgebietes angestrebt wird. Das Spektrum reicht dabei von der medizinischen Diagnostik über die Untersuchung von Werkstoffeigenschaften (zerstörungsfreie Prüfverfahren), bis hin zu geowissenschaftlichen Fragestellungen. Im letzteren Anwendungsfeld werden tomographische Verfahren zur Untersuchung der Beschaffenheit des Erdkörpers (seismische Tomographie), zur Sondierung der Eigenschaften von Wasserkörpern (Ozeanographie) und für atmosphärische Untersuchungen eingesetzt.

In den folgenden Abschnitten sollen zunächst verschiedene Anwendungsfelder für tomographische Verfahren dargestellt werden, bevor im Anschluss auf theoretische Hintergründe sowie Algorithmen zur Rekonstruktion von Verteilungen aus Messwerten entlang verschiedener Ausbreitungswege eingegangen wird.

### **4.1. Anwendungsgebiete tomographischer Verfahren**

Tomographische Verfahren werden als Fernerkundungsverfahren für verschiedene Messaufgaben eingesetzt. Die wohl bekannteste Anwendung tomographischer Verfahren ist in der medizinischen Diagnostik (z. B. Radiologie) angesiedelt. In diesem Bereich wird der menschliche Körper von Röntgenstrahlen unter verschiedenen Winkeln durchlaufen. Die Intensität eines jeden Röntgenstrahls wird aufgezeichnet und im Anschluss verwendet, um ein zweidimensionales Schnittbild der Dämpfungswerte des durchleuchteten Körperabschnittes darzustellen (Natterer, 2001). Die Dämpfungswerte stehen wiederum in Zusammenhang mit der Gewebestruktur (unterschiedliche Dämpfung von Röntgenstrahlung) innerhalb der untersuchten Messebene und lassen somit Aussagen über den Zustand des Pa-

tienten ableiten ohne operativ in den Organismus eingreifen zu müssen. Medizinische Anwendungen sind jedoch nicht auf radiologische Untersuchungen mit Hilfe von Röntgenstrahlung beschränkt. Als Sondierungsenergie wird außerdem auf Ultraschall (z. B. Nawata und Kaneko, 1999), Radiowellen und magnetische Felder (Magnetresonanz-/ Kernspintomographie) oder radioaktive Isotope (Positronen-Emissions-Tomographie) zurückgegriffen (Dössel, 2000). Die rekonstruierten Informationen unterscheiden sich dabei in Abhängigkeit von der verwendeten Sondierungsenergie, da deren Charakteristika in Abhängigkeit von den Wechselwirkungen mit dem durchlaufenen Medium modifiziert werden.

Eine weitere weit verbreitete Anwendung tomographischer Verfahren ist bei geophysikalischen Untersuchungen des Erdinneren gegeben (Menke, 1984). Da Strukturen des Erdinneren nur begrenzt durch direkte Messungen (z. B. Bohrungen) erfasst werden können, nutzt man Fernerkundungsverfahren, wie die Tomographie, um Informationen über den gesamten Erdkörper oder räumlich begrenzte Gebiete zu erhalten. Hierzu zählen unter anderem Untersuchungen zur Struktur und Ausdehnung der Lagerstätten von Bodenschätzen (Lo und Inderwiesen, 1994) oder zur Beschaffenheit des Erdmantels in einem definierten Gebiet (Nercessian et al., 1984). Die Messinformationen stammen dabei aus Laufzeitmessungen aktiv erzeugter seismischer Signale (Erschütterungen), welche in Abhängigkeit von den Eigenschaften des durchlaufenen Messgebietes variieren. Hierbei wird einerseits eine direkte Ausbreitung zwischen Sendern und Empfängern betrachtet, wobei die Anbringung mehrerer Sender und Empfänger an sich gegenüberliegenden Messstellen (Bohrlöchern) im Erdkörper erfolgt, andererseits wird ausgenutzt, dass Signale an Inhomogenitäten innerhalb der Erde reflektiert werden, um Informationen aus größeren Tiefen zu erhalten (Nercessian et al., 1984). Im Gegensatz zu dieser aktiven Erkundung, werden für seismische Untersuchungen des Erdinneren auch natürlich vorkommende Sondierungsenergien eingesetzt (passive Fernerkundung). So geben die Ankunftszeiten seismischer Wellen, welche bei Erdbeben entstehen, Auskunft über die Beschaffenheit des Erdkörpers zwischen der natürlichen Quelle der Wellen im Erdinneren und den Sondierungspunkten an der Erdoberfläche. Tomographische Inversionstechniken werden in diesem Fall genutzt, um die Informationen entlang einzelner Wege in eine Verteilung charakteristischer Größen (z. B. Beschaffenheit der Kruste oder des Erdmantels) innerhalb des Untersuchungsgebietes zu übersetzen (Aki und Lee, 1976).

Auch in der Ozeanographie werden tomographische Verfahren eingesetzt, um z. B. die Eigenschaften eines ausgedehnten Wasserkörpers mittels akustischer Signale zu bestimmen (Munk et al., 1995). Die Laufzeit dieser Signale wird bei ihrem Weg durch das Medium in Abhängigkeit von dessen Beschaffenheit charakteristisch beeinflusst. Ursache hierfür ist die Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit in Wasser von der Zusammensetzung (Salzgehalt) und der Temperatur sowie der Strömungsgeschwindigkeit entlang des Ausbreitungsweges.

Bei Untersuchungen der Atmosphäre werden tomographische Techniken ebenfalls angewendet. Zum einen werden tomographische Verfahren im Bereich der Ionosphäre eingesetzt, wo mit Hilfe von Satellitendaten die Verteilung des Elektronengehalts abgeschätzt



wird (Frey et al., 1998). Außerdem finden tomographische Verfahren auch in Bodennähe Anwendung. Hier wird unter anderem ausgenutzt, dass, Licht in Abhängigkeit von vorhandenen Gasbestandteilen, bei charakteristischen Wellenlängen absorbiert wird. Messungen der Absorption auf verschiedenen Wegen innerhalb eines Messgebietes geben somit Auskunft über Art und Menge vorhandener Verunreinigungen, deren Verteilungen mittels tomographischer Verfahren rekonstruiert werden können (Laeppele et al., 2004; Todd und Bhattacharyya, 1997). Ein weiteres Anwendungsgebiet tomographischer Verfahren in der Atmosphäre dient der Bestimmung von Verteilungen von Temperatur und Strömung in einem begrenzten Untersuchungsgebiet (z. B. Wilson und Thomson, 1994; Wilson et al., 2001; Arnold et al., 2000; Ziemann et al., 2000; Arnold et al., 2001; Raabe et al., 2001; Ziemann et al., 2002). Diese Methode beruht auf der Abhängigkeit der Geschwindigkeit akustischer Signale von Temperatur und Strömung entlang des Ausbreitungsweges der Signale (vgl. Kapitel 2.2). Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde diese Methode erweitert und verfeinert, so dass neue Anwendungsgebiete erschlossen werden konnten.

## 4.2. Theoretische Grundlagen

Die theoretische Grundlage für tomographische Rekonstruktionstechniken schuf Radon 1917 (Radon, 1917). Er beschrieb den Zusammenhang zwischen den Informationen entlang verschiedener Linien durch ein Medium und der zweidimensionalen Verteilung der Eigenschaften des Mediums. Wie auch an den oben genannten Beispielen zur Anwendung tomographischer Verfahren ersichtlich wird, beruht die Rekonstruktion von räumlichen Verteilungen einer Größe innerhalb eines Gebietes, welche durch eine Modellfunktion  $f(x,y)$  beschrieben werden können, auf Messwerten, die entlang verschiedener Wege (unter verschiedenen Winkeln) durch das Medium gewonnen wurden. Die Signalenergie muss dabei so gewählt werden, dass sie mit dem Medium in Wechselwirkung tritt, so dass deren Eigenschaften beim Durchlaufen des Messgebietes messbar verändert werden. Es muss weiterhin sichergestellt sein, dass eine eindeutige Zuordnung der Änderungen der Sondierungsenergie (z. B. Laufzeit oder Dämpfung des Signals) zu den zu messenden Parametern im Messgebiet möglich ist.

Die Messungen erfolgen entlang bestimmter Ausbreitungswege, welche durch die Lage der Sender und Empfänger bzw. durch die Bedingungen selbst, welche innerhalb des Mediums herrschen, charakterisiert werden. Da solche Linienmessungen Informationen über die mittleren (integralen) Bedingungen entlang des gesamten Ausbreitungsweges widerspiegeln, werden diese Werte als Linienintegralwerte oder Projektionen  $p(\theta,s)$  bezeichnet (vgl. Abbildung 21). Projektionen können im einfachsten Fall aus Informationen unter verschiedenen Projektionswinkeln  $\theta$  entlang paralleler Strahlen gewonnen werden (Parallelverschiebung von Sender und Empfänger). Eine weitere Möglichkeit zur Erzeugung von Projektionen besteht im Einsatz einer einzelnen Signalquelle, deren Signal nach Durchlaufen des Messgebietes von einer Reihe von Detektoren erfasst wird, so dass eine fächerförmige Überdeckung des Messgebietes erreicht wird (Kak und Slaney, 1988; Natterer, 2001).

Die Projektion  $p(\theta, s)$  unter dem Winkel  $\theta$  in Abhängigkeit von der Modellfunktion  $f(x, y)$  ist gegeben durch

$$p(\theta, s) = \int_{\text{Signalweg}(\theta, s)} f(x, y) dl, \quad (4.1)$$

wobei die Integration über den gesamten Ausbreitungsweg  $l$  durch das Messgebiet erfolgt.

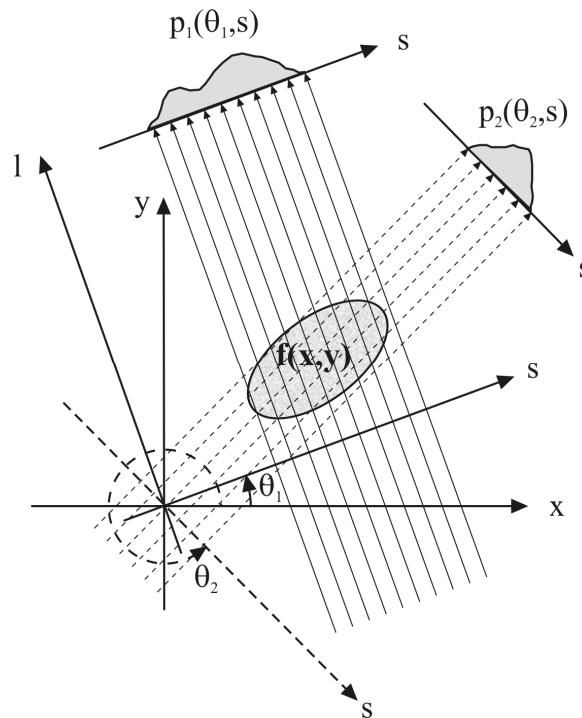


Abbildung 21: Schematische Darstellung zur Erzeugung von Projektionen durch ein Messobjekt mittels integraler Messungen. Die Signalenergie breitet sich entlang verschiedener Ausbreitungswege (parallele Pfeile) aus, wobei jeweils ein Pfeil ein Sender-Empfänger-Paar symbolisiert. Die Linienintegralwerte für verschiedene Einfallswinkel  $\theta_i$  entsprechen dabei Projektionen  $p_i(\theta_i, s)$  der Modellfunktion  $f(x, y)$ , welche das Messgebiet charakterisiert (nach Kak und Slaney, 1988).

Ziel ist es nun, aus den unter verschiedenen Winkeln gemessenen Projektionen  $p(\theta, s)$  die Verteilung der physikalischen Parameter in einem Messgebiet, also die Modellfunktion  $f(x, y)$ , eindeutig zu rekonstruieren. Zur Lösung dieser Aufgabe, welche als inverses Problem bezeichnet wird, wurden zahlreiche Algorithmen entwickelt. Diese lassen sich in drei Hauptgruppen unterteilen (Frey et al., 1998):

1. Fourier-Transform-Methoden,
2. Algebraische Methoden und
3. Statistische Methoden.

Im Gegensatz zu den beiden erstgenannten Methoden müssen für die Anwendung von Algorithmen aus der dritten Gruppe bestimmte Voraussetzungen an die Verteilung gestellt werden. Dies setzt die Kenntnis von zusätzlichen Informationen über die Beschaffenheit des Messmediums voraus, welche bei der Invertierung der Messdaten verarbeitet werden.

Vorteil solcher statistischer Inversionstechniken ist, dass eine verlässliche Rekonstruktion der Verteilungen auch bei schlechter Überdeckung des Untersuchungsgebietes mit Messstrecken gewährleistet ist (Siltanen et al., 2003). In der vorliegenden Arbeit soll eine tomographische Inversion jedoch ohne zusätzliche Messungen durchgeführt werden. Es wird daher auf die nähere Beschreibung statistischer Inversionstechniken verzichtet. Ausführliche Abhandlungen zu diesem Thema geben zum Beispiel Hanson (1987), Kaipio et al. (2000), Mosegaard und Sambridge (2002) oder Evans und Stark (2002).

In den nächsten beiden Kapiteln werden die Grundzüge der Fourier-Transform-Methoden (FTM) und der algebraischen Methoden (AM) beschrieben. Zum Verständnis der FTM wird im folgenden Kapitel zunächst das Projection Slice Theorem, welches den Zusammenhang zwischen Verteilungen und Projektionen im Orts- und Wellenzahlraum darstellt, erläutert. Im Abschnitt über die AM werden Grundzüge dieser Technik beschrieben und verschiedene Varianten ihrer Implementierung dargestellt.

### 4.3. Methoden I: Projection-Slice-Theorem und Fourier-Transform-Methoden

Grundlage für Fourier-Transform-Methoden (FTM) ist das Verständnis des Zusammenhangs zwischen den Linienintegralwerten (Projektionen  $p(\theta, s)$ ) durch eine Verteilung physikalischer Eigenschaften im Ortsraum  $f(x, y)$  sowie deren Transformationen in den Spektralraum, welche mittels Fouriertransformationen (vgl. Kapitel 3.2) bestimmt werden können. Die Beziehung zwischen Orts- und Spektralraum bezüglich der Verteilung und den Projektionen wird durch das Projection-Slice-Theorem (auch Fourier-Slice-Theorem) beschrieben (z. B. Kak und Slaney, 1988; Lo und Inderwiesen, 1994).

Ausgangspunkt zur Herleitung des Projection-Slice-Theorems ist der Zusammenhang zwischen der Modellfunktion und den Projektionen nach Gleichung (4.1) sowie die Betrachtung der Koordinatensysteme  $(x, y)$  und  $(s, l)$  in Abbildung 21. Die Koordinatensysteme können durch Drehung um den Koordinatenursprung ineinander überführt werden. Aus geometrischen Betrachtungen ist der Zusammenhang zwischen den Raumkoordinaten  $(x, y)$  und den Koordinaten  $(s, l)$ , welche das um den Projektionswinkel  $\theta$  gedrehte System beschreiben, gegeben als

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ l \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} s \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Somit erfüllen alle Punkte entlang einer Projektion die Beziehung

$$s = x \cos \theta + y \sin \theta . \quad (4.4)$$

Unter Verwendung der Delta-Distribution

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (4.5)$$

lässt sich Gleichung (4.1) schreiben als (Kak und Slaney, 1988)

$$p(\theta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy . \quad (4.6)$$

In Analogie zur eindimensionalen Fouriertransformation nach Gleichung (3.11) gilt für die Transformation einer Funktion zweier Veränderlicher  $f(x, y)$  in ihre Spektraldarstellung im Wellenzahlraum (z. B. Lim, 1990)

$$F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy , \quad (4.7)$$

wobei  $k_x$  und  $k_y$  die Komponenten des Wellenzahlvektors  $\mathbf{k}$  darstellen und über

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \end{bmatrix} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{e}_1 \quad (4.8)$$

mit der Wellenlänge  $\lambda$  verknüpft sind. Mit  $\mathbf{e}_1$  wird der Einheitsvektor in der Ausbreitungsrichtung der Welle gekennzeichnet (Landau und Lifschitz, 1991). Wie bereits in Kapitel 3.2 beschrieben, gewährleistet die Fouriertransformation eine eindeutige Überführung der Funktion in den Spektralbereich und umgekehrt. Im zweidimensionalen Fall ist die Rücktransformation von  $F(k_x, k_y)$  in den Ortsraum gegeben durch

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y . \quad (4.9)$$

Wendet man die eindimensionale Fouriertransformation nach Gleichung (3.11) auf die Projektion  $p(\theta, s)$  bezüglich der Raumkoordinate  $s$  an, so erhält man die Transformierte

$$P(\theta, k_s) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\theta, s) e^{-ik_s s} ds . \quad (4.10)$$

Die Variable  $k_s$  bezeichnet hier die Wellenzahl entlang der  $s$ -Achse.

Setzt man in diese Gleichung den Zusammenhang zwischen der Modellfunktion und den Projektionen aus Gleichung (4.6) ein, ergibt sich

$$P(\theta, k_s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) \cdot e^{-ik_s s} dx dy . \quad (4.11)$$

Unter Verwendung der Eigenschaften der Delta-Distribution kann folgende Umformung durchgeführt werden

$$P(\theta, k_s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot e^{-ik_s(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy. \quad (4.12)$$

Setzt man die geometrische Abhängigkeit der Wellenzahlen

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \end{bmatrix} = k_s \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

in Gleichung (4.12) ein, erhält man

$$P(\theta, k_s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (4.14)$$

Somit gilt

$$P(\theta, k_s) = F(k_x, k_y) = F(k_s \cos \theta, k_s \sin \theta). \quad (4.15)$$

Diese Beziehung wird als Projection-Slice-Theorem bezeichnet. Es beschreibt den Zusammenhang zwischen den Fouriertransformierten einer zweidimensionalen Verteilung in einem Gebiet und den eindimensionalen Projektion, welche durch das Gebiet verlaufen. Es sei darauf hingewiesen, dass sich die Projektionen im Ortsraum aus Linienintegralwerten zusammensetzen, welche das Untersuchungsgebiet jeweils unter einem konstanten Winkel  $\theta$  durchlaufen. Die Fouriertransformierten der Projektionen  $P(\theta, k_s)$  werden durch Geraden im Spektralraum repräsentiert, welche unter dem Projektionswinkel  $\theta$  durch den Koordinatenursprung des Koordinatensystems verlaufen, das durch die Wellenzahlen  $k_x$  und  $k_y$  aufgespannt wird. Die  $P(\theta, k_s)$  entsprechen folglich einem Schnitt entlang der  $k_s$ -Achse durch die Verteilung, welche von der Fouriertransformierten der Modellfunktion im Spektralbereich aufgespannt wird (vgl. Abbildung 22).

Fourier-Transform-Methoden basieren auf dem Projection-Slice-Theorem. Sie nutzen aus, dass die Fouriertransformierte der Modellfunktion  $F(k_x, k_y)$  durch Fouriertransformationen der Projektionen  $P(\theta, k_s)$  bestimmt ist, wobei die Projektionen den gesamten Winkelbereich abdecken müssen. Die Berechnung der Verteilung im Ortsraum erfolgt daraufhin durch Rücktransformation der Verteilung  $F(k_x, k_y)$  nach Gleichung (4.9).

Bei praktischen Anwendungen steht jedoch nur eine diskrete Anzahl von Messungen (Linienintegralwerten) zur Verfügung. Zudem bewirkt die Winkelabhängigkeit der Schnittlinien (vgl. Abbildung 22), dass deutlich mehr Informationen im zentralen Bereich (bei kleinen Wellenzahlen) gegeben sind und die Informationsdichte zu größeren Wellenzahlen hin abnimmt. Um gleich verteilte Informationen über den gesamten Wellenzahlraum zu erhalten und die Verteilung der Modellfunktion zu rekonstruieren, ist es nötig, die Informationen in den Bereichen zwischen den Schnitten im Wellenzahlraum zu interpolieren, d. h. die Daten von Polarkoordinaten  $(\theta, k_s)$  in kartesische Koordinaten  $(k_x, k_y)$  umzuwandeln. Feh-

ler, die bei der Interpolation auftreten, verursachen dabei Abweichungen zwischen der rekonstruierten und der wahren Verteilung im Ortsraum.

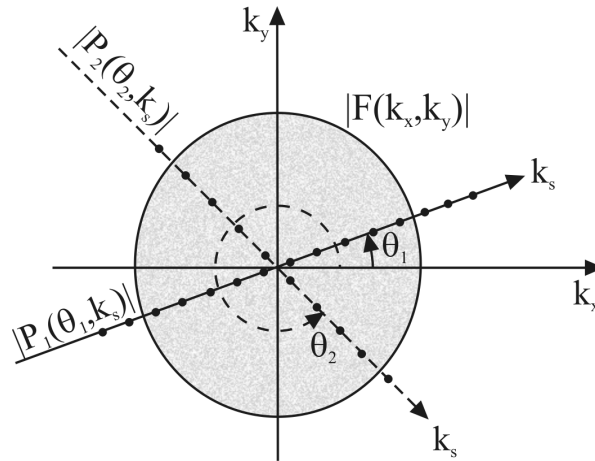


Abbildung 22: Bedeutung des Projection-Slice-Theorems. Die graue Fläche symbolisiert die Amplitudenfunktion  $|F(k_x, k_y)|$  der zweidimensionalen Fouriertransformierten der Modellfunktion  $F(k_x, k_y)$ . Die Amplitudenfunktionen der Transformierten der Projektionen  $|P(\theta, k_s)|$  werden durch Schnittlinien in Abhängigkeit vom Projektionswinkel  $\theta$  im Spektralraum wiedergegeben. Schwarze Punkte entlang der Schnittlinien symbolisieren diskrete Abtastwerte im Spektralraum, welche durch die diskrete Anzahl von Linienintegralwerten im Ortsraum bestimmt werden.

Eine Methode, welche die fehleranfällige Interpolation im Frequenzraum durch Wichtung der transformierten Projektionen umgeht, ist die Faltungsmethode (Filtered Backprojection). Hierbei wird die Rücktransformation der Modellmatrix aus dem Wellenzahlraum in den Ortsraum in Polarkoordinaten realisiert und ist damit konsistent zu den Koordinaten der Schnitte, welche durch die Fouriertransformierten der gemessenen Projektionen gegeben sind. Hierfür werden die kartesischen Wellenzahlen  $k_x$  und  $k_y$  in Gleichung (4.9) entsprechend Gleichung (4.13) in Polarkoordinaten überführt und die Integranden  $dk_x dk_y$  durch  $|k_s| dk_s d\theta$  ersetzt. Die Rekonstruktion der Verteilung der Modellfunktion  $f(x, y)$  beruht in diesem Fall auf der Lösung des Integrals (Lo und Inderwiesen, 1994)

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} P(\theta, k_s) e^{i k_s (x \cos \theta + y \sin \theta)} |k_s| dk_s d\theta. \quad (4.16)$$

Der Faktor  $|k_s|$  repräsentiert die Filterfunktion im Spektralraum, welche eine Wichtung der Daten in Abhängigkeit von deren Abstand zum Ursprung des Koordinatensystems im Spektralraum bewirkt.

Fourier-Transform-Methoden bieten somit die Möglichkeit, Messungen entlang verschiedener Linien durch Transformationen direkt in Verteilungen zu überführen. Es sind jedoch gewisse Anforderungen an die Mess- bzw. Projektionsdaten zu stellen. Um zufriedenstellende Rekonstruktionsergebnisse zu erhalten, muss das Messgebiet homogen und möglichst dicht von Messstrecken durchsetzt sein. Des Weiteren ist es bei diesen Methoden

nicht möglich, Probleme mit gekrümmten Strahlwegen, wie sie bei geowissenschaftlichen Fragestellungen häufig auftreten, zu untersuchen. Eine Alternative, welche auch in diesen Fällen angewendet werden kann, bieten die algebraischen Methoden.

#### 4.4. Methoden II: Algebraische Methoden

Im folgenden Abschnitt sollen algebraische Methoden (AM) vorgestellt werden, welche auch als Iterationsverfahren bezeichnet werden. Diese Gruppe der tomographischen Inversionstechniken geht auf eine Arbeit von Kaczmarz (1937) zurück, in welcher ein iteratives Verfahren vorgestellt wird, das zur Lösung eines linearen Gleichungssystems eingesetzt werden kann, das dem inversen Problems aus Gleichung (4.1) entspricht.

Vorteile algebraischer Methoden gegenüber Fourier-Transform-Methoden sind, dass die Rekonstruktion auch bei geringer Strahlanzahl und bei nicht homogener Überdeckung des Untersuchungsgebietes mit Projektionen akzeptable Ergebnisse liefert. Des Weiteren zeichnen sich derartige Methoden durch vergleichsweise geringen Speicherbedarf bei der rechnergestützten Invertierung aus und es gibt die Möglichkeit, bestimmte Anforderungen an die Verteilungen (z. B. nichtnegative Dichtewerte) einfach zu implementieren (Gordon et al., 1970).

##### 4.4.1. Grundlagen

Zur Anwendung algebraischer Methoden wird in einem ersten Schritt die kontinuierliche Beziehung zwischen der Verteilung physikalischer Größen im Messgebiet, der Modellfunktion  $f(x,y)$  und den Projektionen  $p(\theta,s)$ , welche durch das Messgebiet verlaufen, diskretisiert. Dazu wird das Messgebiet in insgesamt  $J$  Gitterzellen eingeteilt. Die Werte der Modellfunktion werden in jeder Gitterzellen  $j$  als konstant angenommen (Mittelwerte der kontinuierlichen Funktion über die Gitterzellengröße) und im Folgenden als  $f_j$  bezeichnet. Die integralen Messungen erfolgen nun unter verschiedenen Projektionswinkeln  $\theta$  durch das Messgebiet und liefern somit Informationen über die Verteilung entlang verschiedener Wege (vgl. Abbildung 23).

Der Strahl durchquert dabei Teile des Gitters, wobei die Strahlstücklänge des  $i$ -ten Strahls innerhalb der  $j$ -ten Gitterzelle mit  $l_{ij}$  bezeichnet wird. Die Gesamtlänge  $l_i$  des  $i$ -ten Strahls innerhalb des Gitters ist somit gegeben durch

$$l_i = \sum_{j=1}^J l_{ij} . \quad (4.17)$$

Diese Diskretisierung erlaubt es, den Zusammenhang zwischen der Projektion  $p_i$  entlang des  $i$ -ten Strahls und den Gitterwerten der Modellfunktion  $f_j$  zu schreiben als (Lo und Inderwiesen, 1994)

$$p_i = \sum_{j=1}^J l_{ij} f_j \quad \text{mit } i=1,2,\dots,I. \quad (4.18)$$

Hierbei bezeichnet  $I$  die Gesamtzahl der Strahlen (Integralwerte), welche das Messgebiet durchlaufen und  $J$  die Gesamtzahl der Gitterzellen im Untersuchungsgebiet. Gleichung (4.18) stellt damit ein lineares Gleichungssystem aus  $I$  Gleichungen und  $J$  Unbekannten dar

$$\begin{aligned} p_1 &= l_{11}f_1 + l_{12}f_2 + \dots + l_{1J}f_J \\ p_2 &= l_{21}f_1 + l_{22}f_2 + \dots + l_{2J}f_J \\ &\vdots \\ p_I &= l_{I1}f_1 + l_{I2}f_2 + \dots + l_{IJ}f_J \end{aligned} \quad (4.19)$$

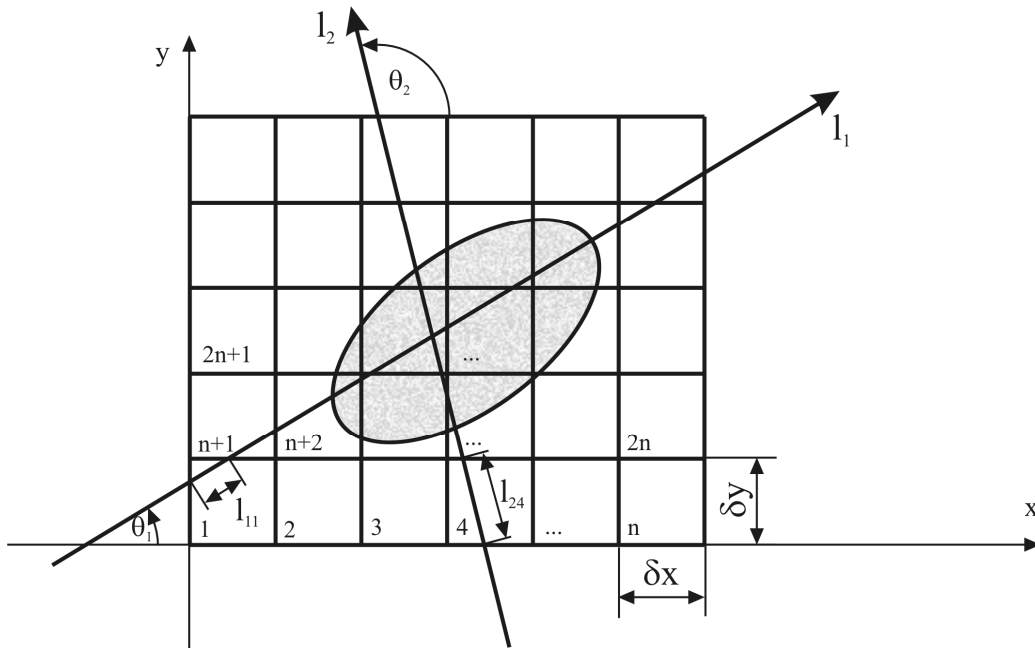


Abbildung 23: Diskretisierung des inversen Problems. Das Messgebiet wird in  $J$  Gitterzellen unterteilt, von denen jede eine Ausdehnung von  $\delta x \times \delta y$  hat. Die kontinuierliche Modellfunktion (graue Fläche) wird als konstant (Mittelwert) innerhalb einer Gitterzelle betrachtet. Das Untersuchungsgebiet wird von Messungen entlang unterschiedlicher Wege ( $l_i, \theta_i$ ) bzw. ( $l_2, \theta_2$ ) durchquert. Die Länge des  $i$ -ten Strahls innerhalb der  $j$ -ten Gitterzelle wird dabei mit  $l_{ij}$  bezeichnet.

In Matrixschreibweise lässt sich dieses System schreiben als

$$\mathbf{p} = \mathbf{L}\mathbf{f}. \quad (4.20)$$

Der Vektor  $\mathbf{p}$  repräsentiert hierbei die Messwerte

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_I)^T \quad (4.21)$$



und  $\mathbf{f}$  die gesuchte Verteilung im Untersuchungsgebiet mit den Komponenten

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_J)^T. \quad (4.22)$$

Die Matrix  $\underline{\mathbf{L}}$  enthält die Strahlstücklängen der Projektionen innerhalb der tomographischen Gitterzellen

$$\underline{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1J} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2J} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{I1} & l_{I2} & \dots & l_{IJ} \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Die Lösung des Systems in Gleichung (4.20) erfolgt bei algebraischen Methoden in einem iterativen Prozess, welcher in Abbildung 24 skizziert ist. Kern der Lösung des inversen Problems (Berechnung der Verteilung innerhalb der Gitterzellen aus gemessenen Linienintegralwerten) ist eine Vorwärtsmodellierung, bei welcher die Linienintegralwerte aus einer vorgegebenen Verteilung bei bekannten Strahlverläufen berechnet werden. Hierfür wird von einer Anfangsverteilung  $\mathbf{f}^{\text{init}}$  an Stelle der wahren Verteilung der Modellfunktion  $\mathbf{f}^{\text{true}}$  im Untersuchungsgebiet ausgegangen, welche als erste Schätzung für die Verteilung innerhalb des Algorithmus betrachtet wird. Die Bestimmung einer solchen Anfangsverteilung kann ohne Zusatzinformationen z. B. als homogene Verteilung angenommen, aus den Messwerten selbst bestimmt oder aus Vorabinformationen (Modelle, zusätzliche Messungen) gewonnen werden.

Im Folgenden soll diese geschätzte Verteilung als  $\mathbf{f}^{\text{est}}$  im Gegensatz zur wahren Verteilung  $\mathbf{f}^{\text{true}}$  bezeichnet werden. Der iterative Prozess beginnt mit einer Vorwärtsmodellierung, wobei aus der aktuell geschätzten Verteilung  $\mathbf{f}^{\text{est}}$  und der Kenntnis über den Verlauf der Projektionen durch das Gitter nach Gleichung (4.20) Werte für die Projektionen selbst,  $\mathbf{p}^{\text{pre}}$ , abgeschätzt werden. Anschließend werden diese Werte mit den gemessenen Daten  $\mathbf{p}^{\text{obs}}$  verglichen. Wurde ein vorgegebenes Abbruchkriterium nicht erreicht, erfolgt eine Anpassung der geschätzten Verteilung in Abhängigkeit vom Unterschied zwischen den gemessenen und den berechneten Integralwerten. Im nächsten Iterationsschritt wird nun eine Vorwärtsmodellierung mit der neuen Verteilung durchgeführt usw. bis das Abbruchkriterium erreicht ist. Als Ergebnis wird die aktuell geschätzte Verteilung  $\mathbf{f}^{\text{est}}$  als beste Schätzung der wahren Verteilung  $\mathbf{f}^{\text{true}}$  ausgegeben.

Aus diesem Vorgehen wird deutlich, dass die Wahl des Abbruchkriteriums einen entscheidenden Einfluss auf die Güte der Rekonstruktionsergebnisse hat. Dieses kann einerseits in Abhängigkeit von den Ergebnissen der iterativen Anpassung aber auch abhängig von einer bestimmten Anzahl angewendeter Iterationsschritte formuliert werden. Zur Wahl eines geeigneten Kriteriums müssen daher die Konvergenzeigenschaften des Algorithmus zu einer eindeutigen Lösung untersucht werden.

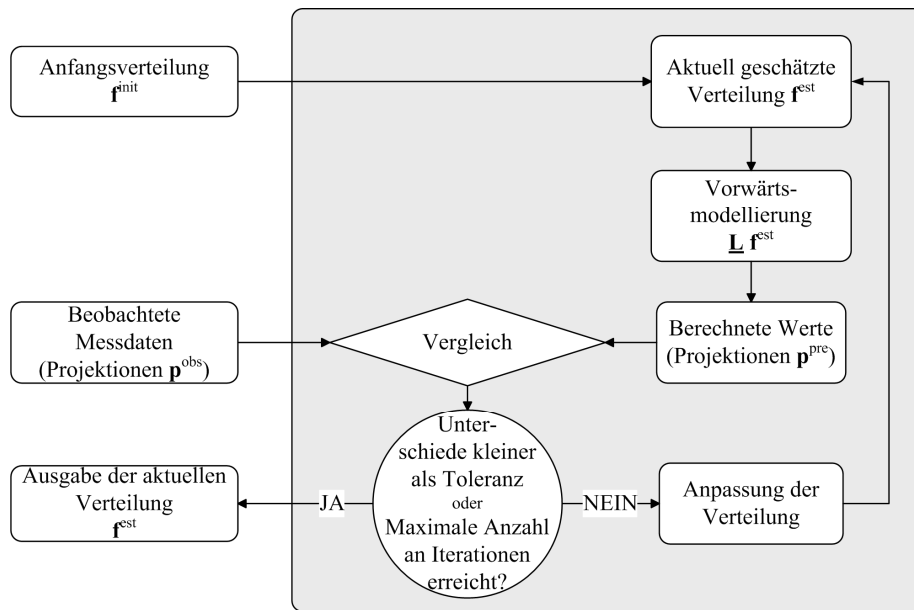


Abbildung 24: Prinzipskizze algebraischer Rekonstruktionstechniken (grauer Kasten): Als Eingangsgrößen dienen Informationen über das tomographische Gitter in Form einer Anfangsverteilung der Modellfunktion  $f^{\text{mit}}$  sowie die beobachteten Messdaten  $p^{\text{obs}}$ . Die Lösung des inversen Problems erfolgt durch Vorwärtsmodellierung und iterative Anpassung der Gitterzellenwerte. Hierzu werden die vorwärts modellierten Projektionsdaten  $p^{\text{pre}}$  nach jedem Iterationsschritt mit den gemessenen Werten  $p^{\text{obs}}$  verglichen. Die Ausgabe der aktuellen Verteilung  $f^{\text{est}}$  als Lösung des inversen Problems erfolgt, wenn ein Abbruchkriterium erreicht wurde (nach Lo und Inderwiesen, 1994).

#### 4.4.2. Konvergenzeigenschaften

Zur Demonstration der Konvergenzeigenschaften des Algorithmus nach Kaczmarz (1937) soll hier ein einfach zu veranschaulichendes Beispiel herangezogen werden. Betrachtet werden zwei Strahlen ( $I = 2$ ), welche ein Gitter mit zwei Zellen ( $J = 2$ ) durchqueren. Zu Lösen ist in diesem Fall folgendes Gleichungssystem (vgl. Gleichung (4.19))

$$\begin{aligned} p_1 &= l_{11}f_1 + l_{12}f_2 \\ p_2 &= l_{21}f_1 + l_{22}f_2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

wobei  $p_1$  und  $p_2$  die Messdaten entlang der Strahlen,  $f_1$  und  $f_2$  die gesuchten Gitterzellenwerte sowie  $l_{ij}$  die Strahlstücklängen des  $i$ -ten Strahls innerhalb der  $j$ -ten Zelle repräsentieren.

Zur graphischen Verdeutlichung der Lösung des Gleichungssystems werden die Geraden  $p_1$  und  $p_2$  aus Gleichung (4.24) in einem zweidimensionalen Modellraum dargestellt, welcher durch die gesuchten Parameterwerte  $f_1$  und  $f_2$  aufgespannt wird. Gesucht ist die wahre Verteilung  $f^{\text{true}}$ , welche durch den Schnittpunkt der Geraden beschrieben werden kann.

Anfangspunkt für die iterative Lösungssuche bildet die Ausgangsverteilung  $f^{\text{mit}}$ . Diese wird im ersten Iterationsschritt auf die Gerade, welche durch  $p_1$  dargestellt wird, orthogonal projiziert. Die resultierende angepasste Lösung  $f^{\text{est},1}$  wird im nächsten Schritt auf die Gerade  $p_2$  projiziert. Man erhält so die nächste Annäherung  $f^{\text{est},2}$ . Durch erneute Projektion der ak-

tuell geschätzten Verteilung auf die Geraden  $p_1$  und  $p_2$  nähert man sich der gesuchten Lösung iterativ an (Kak und Slaney, 1988).

Für drei Gleichungen ( $I = 3$ ) mit drei Unbekannten ( $J = 3$ ) entspricht die gesuchte Lösung des Systems  $\mathbf{f}^{\text{true}}$  dem Schnittpunkt dreier Ebenen, welche durch die Gleichungen  $p_1, p_2$  und  $p_3$  in einem dreidimensionalen Raum aufgespannt werden. Im allgemeinen Fall mit  $I$  Strahlen und  $J$  Gitterzellen, kann die Lösung des Gleichungssystems (4.19) in einem  $J$ -dimensionalen Raum dargestellt werden. Die Geraden aus Abbildung 25 sind in diesem Fall als Hyperebenen der Dimension  $J - 1$  zu betrachten. Die Lösung des Gleichungssystems stellt dann den Schnittpunkt der  $I$  Hyperebenen dar (Lo und Inderwiesen, 1994). Existiert eine eindeutige Lösung des Gleichungssystems, so konvergiert die Methode nach Kaczmarz zu dieser Lösung (Tanabe, 1971).

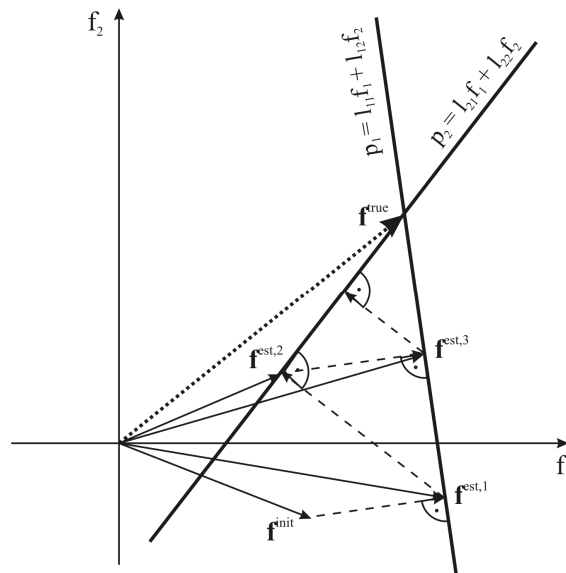


Abbildung 25: Demonstration der Methode nach Kaczmarz (1937) zur Lösung eines linearen Gleichungssystems für den Fall eines Systems mit zwei Unbekannten ( $f_1, f_2$ ) und zwei Gleichungen ( $p_1, p_2$ ). Als Ausgangspunkt wird eine geschätzte Anfangsverteilung  $f^{\text{init}}$  festgelegt. Die erste Iteration führt durch orthogonale Projektion der Anfangsverteilung auf die erste Gerade, welche durch die erste Gleichung im System (4.24) repräsentiert wird, auf eine neue geschätzte Lösung  $f^{\text{est},1}$ . Diese wird auf die zweite Gerade projiziert, um eine weitere Annäherung  $f^{\text{est},2}$  an die wahre Lösung  $f^{\text{true}}$ , welche durch den Schnittpunkt der Geraden dargestellt wird, zu erhalten. Weitere Projektionen auf die beiden Geraden führen zu einer weiteren Annäherung an die wahre Verteilung (nach Kak und Slaney, 1988).

Um die Genauigkeit der Rekonstruktionsergebnisse abzuschätzen, schlagen Gordon et al. (1970) bzw. Gordon (1974) verschiedene Parameter vor. Hierfür werden synthetische Verteilungen erzeugt und diese, entsprechend einer vorgegebenen Messgeometrie, in simulierte Messdaten überführt. Beim Test eines Algorithmus kann dann die rekonstruierte Verteilung direkt mit der synthetisch erzeugten Vorgabe verglichen werden. Hierbei kann der normierte euklidische Abstand  $\delta f$  zwischen der vorgegebenen (wahren) Verteilung  $\mathbf{f}^{\text{true}}$  und der aktuell berechneten Verteilung  $\mathbf{f}^{\text{est}}$  innerhalb des Tomographiegitters berechnet werden als

$$\delta f = \frac{1}{J} \sqrt{\sum_{j=1}^J (f_j^{\text{est}} - f_j^{\text{true}})^2}. \quad (4.25)$$

Mit steigender Iterationszahl konvergiert die berechnete Verteilung gegen die wahre Verteilung, der euklidische Abstand verringert sich.

Im Allgemeinen ist die wahre Verteilung jedoch nicht bekannt, sondern soll aus Messwerten gewonnen werden. In diesen Fällen muss auf andere Kriterien zur Abschätzung der Konvergenz zurückgegriffen werden. Hierfür kann der Unterschied zwischen den gemessenen  $p_i^{\text{obs}}$  und den vorwärtsmodellierten Projektionswerten  $p_i^{\text{pre}}$  in der Form

$$\delta p = \sqrt{\sum_{i=1}^I \left[ (p_i^{\text{obs}} - p_i^{\text{pre}}) \cdot \left( l_i / \sum_{i=1}^I l_i \right) \right]^2} \quad (4.26)$$

betrachtet werden. Die Größe  $l_i$  entspricht nach Gleichung (4.17) wiederum der Gesamtlänge des  $i$ -ten Strahls innerhalb des Gitters und dient als Wichtungsterm für den Projektionswert entlang dieses Strahls bezüglich der Gesamtlänge aller Strahlen, die das Messgebiet durchlaufen. Je geringer der Wert für  $\delta p$ , desto kleiner sind die Abweichungen zwischen den gemessenen Strahlinformationen und den vorwärtsmodellierten Projektionswerten.

Die Wahl eines Kriteriums ist neben der aktuellen Fragestellung (Rekonstruktion gemessener Verteilungen oder Rekonstruktion einer Testverteilung) auch von der Wahl des Lösungsalgorithmus abhängig. Im folgenden Abschnitt werden verschiedene Implementierungen des Iterationsverfahrens nach Kaczmarz dargestellt.

#### 4.4.3. Rekonstruktionsalgorithmen

Für die Implementierung der oben beschriebenen iterativen Methode gibt es verschiedene Ansätze, welche sich insbesondere darin unterscheiden, wie die iterative Anpassung der Verteilung  $\mathbf{f}^{\text{est}}$  erfolgt. Als erstes sei die algebraische Rekonstruktionstechnik (ART) genannt, welche den Algorithmus nach Kaczmarz (vgl. Kapitel 4.4.1) direkt anwendet, erstmals von Gordon et al. (1970) beschrieben wurde und in den folgenden Jahren durch Anpassungen und Verfeinerungen verbessert wurde (Gordon, 1974).

Die iterative Verbesserung  $\Delta^i f_j$  der im Iterationsschritt aktuell geschätzten Lösung in jeder Gitterzelle  $j$  erfolgt bei ART in Abhängigkeit vom  $i$ -ten Strahl und der geschätzten Modellfunktion  $f_j^{\text{est}}$  nach (Lo und Inderwiesen, 1994)

$$\Delta^i f_j = l_{ij} \frac{p_i^{\text{obs}} - p_i^{\text{pre}}}{\sum_{j=1}^J l_{ij}^2} = l_{ij} \frac{p_i^{\text{obs}} - \sum_{j=1}^J l_{ij} f_j^{\text{est}}}{\sum_{j=1}^J l_{ij}^2}. \quad (4.27)$$

Hierbei repräsentiert  $p_i^{\text{obs}}$  den gemessenen Linienintegralwert entlang des  $i$ -ten Strahls und  $l_{ij}$  den Strahlstücklängenabschnitt des  $i$ -ten Strahls innerhalb der  $j$ -ten Gitterzelle. Das Ergebnis der Vorwärtsmodellierung für den  $i$ -ten Strahl ist als  $p_i^{\text{pre}}$  angegeben. Der Divisor in Gleichung (4.27) stellt einen Wichtungsterm dar, welcher gleich der Gesamtlänge des  $i$ -ten Strahls durch das Tomographiegitter ist. Die neue geschätzte Modellfunktion  $f_j^{\text{est,neu}}$  ergibt sich aus dem Beitrag des  $i$ -ten Strahls dann zu (Lo und Inderwiesen, 1994)

$$f_j^{\text{est,neu}} = f_j^{\text{est}} + \Delta^i f_j, \text{ mit } j = 1, \dots, J. \quad (4.28)$$

Die Verbesserung der Zellenwerte wird nach der Betrachtung jedes einzelnen Strahls durchgeführt. Die Rekonstruktionsergebnisse mit ART ergeben Bilder welche durch ihre Körnigkeit gekennzeichnet sind. Diese ist auf die sukzessive Behandlung der Strahlinformationen zur Verbesserung der rekonstruierten Verteilung zurückzuführen. Des Weiteren zeigte die Untersuchung des Konvergenzverhaltens dieses Algorithmus für reale Messdaten, dass nach einem Rückgang des euklidischen Abstands nach Gleichung (4.25) mit wachsender Iterationszahl ein erneuter Anstieg zu beobachten war. Obgleich sich die Übereinstimmung der Verteilungen (wahre Verteilung und rekonstruierte Verteilung) verschlechterte, näherten sich die berechneten Linienintegralwerte den gemessenen weiter an (Gilbert, 1970). Somit können die Unterschiede der Linienintegralwerte nach Gleichung (4.26) nicht als alleiniges Abbruchkriterium für den iterativen Prozess dienen. Herman et al. (1973) schlagen stattdessen vor, die Varianzen  $\sigma^2$  mit

$$\sigma^2 = \frac{1}{J^2} \sum_{j=1}^J (f_j^{\text{est}} - f_T)^2 \quad \text{und} \quad f_T = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J f_j^{\text{est}} \quad (4.29)$$

zwischen der zuletzt geschätzten und der neu bestimmten Verteilung bei jeder Iteration zu betrachten. Als Abbruchkriterium dient nun die Bedingung

$$|\sigma_{k+1}^2 - \sigma_k^2| < \frac{1}{100} \sigma_k^2. \quad (4.30)$$

Hierbei entspricht  $\sigma_k^2$  der Varianz der Verteilung, welche bei der letzten Iteration berechnet wurde und  $\sigma_{k+1}^2$  derjenigen Varianz der im aktuellen Iterationsschritt bestimmten Verteilung.

Diese Methode beruht auf dem Konvergenzverhalten von ART, wenn keine eindeutige Lösung existiert (z. B. bei verrauschten Messwerten). Hierbei folgt auf eine anfänglich schnelle Annäherung des Ergebnisses an die gesuchte wahre Verteilung mit steigender Iterationszahl eine langsame Divergenz. Die Varianz zwischen den Ergebnissen zweier aufeinander folgender Iterationen sinkt somit anfänglich rasch und steigt im weiteren Verlauf langsam wieder an.

Um die Grobkörnigkeit der Bilder, welche durch die sukzessive Abarbeitung jedes einzelnen Strahls im ART-Algorithmus hervorgerufen wird, zu unterdrücken, wurde eine alternative Rekonstruktionstechnik, die simultane iterative Rekonstruktionstechnik SIRT, eingeführt (Gilbert, 1972). Die Rekonstruktionsergebnisse mit SIRT ergeben weniger verrausch-

te Bilder im Vergleich zur Rekonstruktion mit ART, dafür konvergieren die Ergebnisse weniger schnell zur gesuchten Lösung. Die Konvergenz bleibt im Gegensatz zu ART jedoch auch bei weiteren Iterationen erhalten. Ab einem bestimmten Iterationsschritt beginnen die Übereinstimmungen nach Gleichung (4.25), welche mit SIRT berechnet werden, allerdings auch zu divergieren. Diese Divergenz ist aber deutlich geringer ausgeprägt, als bei ART, so dass der Abbruch der Iterationen nach einem bestimmten Iterationsschritt (10 bis 15) ein deutlich besseres Rekonstruktionsergebnis liefert (Gilbert, 1972).

Die Berechnung der Verbesserung der aktuell geschätzten Verteilung in Abhängigkeit vom  $i$ -ten Strahl  $\Delta^i f_j$  erfolgt analog zur Berechnung bei ART, vgl. Gleichung (4.27). Im Gegensatz zu ART werden die Zellenwerte, welche vom  $i$ -ten Strahl durchlaufen werden, jedoch nicht sofort nach der Behandlung dieses Strahls aktualisiert, sondern zunächst alle weiteren Strahlen betrachtet. Erst nach der Analyse aller Strahlen, welche die betrachtete Zelle durchlaufen, erfolgt die Berechnung der Korrekturwerte für jede Zelle. Hierfür wird der Mittelwert aus den Korrekturen bestimmt, die sich aus der Behandlung der einzelnen Strecken ergeben haben (Lo und Inderwiesen, 1994)

$$\Delta f_j = \frac{1}{w_j} \sum_{i=1}^I \Delta^i f_j . \quad (4.31)$$

Die Faktoren  $w_j^{-1}$  sind Wichtungsfaktoren, welche sich z. B. aus der Anzahl der Strahlen, die zu einem Gitterzellenwert beitragen bzw. dem Anteil der Strahlstücklängen aller Strahlen innerhalb der  $j$ -ten Gitterzelle, bestimmen lassen.

Die verbesserte Verteilung kann nun wiederum nach Gleichung (4.28) berechnet werden. Diese wird im Anschluss anstelle der vorangegangenen geschätzten Verteilung zur Vorwärtsmodellierung und Berechnung der sich ergebenden Projektionswerte eingesetzt usw., bis das Abbruchkriterium erreicht wird (Kak und Slaney, 1988).

Neben den Konvergenzeigenschaften, welche diejenigen von ART deutlich überragen, zeichnet sich SIRT durch eine geringere Anfälligkeit gegenüber kleinen Abweichungen in den Ausgangsdaten (Messdaten, Projektionen) aus. Gilbert (1972) gibt an, dass SIRT auch bei zufälligen Fehlern in den Ausgangsdaten, die in einem Bereich von 10% lagen, zufriedenstellende Rekonstruktionsergebnisse lieferte, wohingegen mit ART in diesen Fällen keine ausreichenden Ergebnisse erzielt werden konnten.

Neben den bereits beschriebenen Algorithmen wurden zahlreiche weitere algebraische Verfahren entwickelt. Genannt werden soll hier die simultane algebraische Rekonstruktionstechnik SART, welche die Vorteile von ART (schnelle Konvergenz) und SIRT (Rekonstruktion "glatter" Verteilungen) kombiniert. Dabei erfolgt die Anpassung der Verteilung nicht nach der Behandlung jedes einzelnen Strahls (ART) oder der Analyse aller Strahlen (SIRT), sondern nach Betrachtung der Integralwerte, welche unter demselben Winkel durch das Messgebiet verlaufen (Andersen und Kak, 1984).

Sweeney und Vest (1973) haben verschiedene Verfahren hinsichtlich ihrer Konvergenzeigenschaften analysiert. Dabei wurde für ART ein Relaxationsparameter  $\lambda_R$  eingeführt,

welcher zu einer Verbesserung der Konvergenzeigenschaften dieses Algorithmus führt. Er skaliert als Faktor den Korrekturterm nach Gleichung (4.27)

$$f_j^{\text{est,neu}} = f_j^{\text{est}} + \lambda_R \cdot \Delta^i f_j, \text{ mit } j = 1, \dots, J \quad (4.32)$$

und bewirkt so, dass die Abhängigkeit des Iterationsergebnisses von der Reihenfolge der Abarbeitung der einzelnen Strahlen mittels ART verringert wird. Für ein verbessertes Ergebnis der iterativen Rekonstruktion der Verteilung wird ein Wert von 0,5 oder geringer für den Relaxationsparameter empfohlen.

#### 4.4.4. Genauigkeitsbetrachtungen

Algebraische Methoden zeichnen sich dadurch aus, dass die Lösung des inversen Problems durch einen iterativen Prozess bestimmt wird. Hierbei werden die Informationen entlang verschiedener Wege durch ein Untersuchungsgebiet analysiert ohne dabei explizit Matrizen zu berechnen, welche für die Abschätzung von Rekonstruktionsgenauigkeit oder Auflösbarkeit des Untersuchungsgebietes genutzt werden können.

Ein Verfahren zur Simulation der Auflösbarkeit mittels algebraischer Methoden ohne die Berechnung von Matrizen bzw. deren Invertierung beschreiben Brzostowski und McMechan (1991). Sie schlagen vor, Verteilungen vorzugeben, welche durch einen abweichenden Wert (eine Anomalie) an den Stellen gekennzeichnet sind, deren Auflösbarkeit bei der betrachteten Geometrie untersucht werden soll. Entsprechend der aktuellen Strahlverläufe werden "Messdaten" für diese anomale Verteilung berechnet und anschließend eine Rekonstruktion durchgeführt. Das Bild der berechneten Verteilung liefert nun ein Maß dafür, wie gut die Modellparameter an der entsprechenden Stelle aufgelöst werden können. Hierbei wird die Anomalie in der Verteilung entlang der Richtung ausgedehnt bzw. verwischt, welche weniger gut aufgelöst wird.

Aussagen über die Auflösbarkeit und den Einfluss von Unsicherheiten bei der Datenerfassung (Messunsicherheiten, systematische Fehler) auf das Rekonstruktionsergebnis können auch durch Konstruktion der Strahlstücklängenmatrix  $\underline{\mathbf{L}}$  getroffen werden (Humphreys und Clayton, 1988).

Hierfür wird zunächst die Lösung des inversen Problems nach Gleichung (4.20) betrachtet. Die Lösung dieses Systems nach der Methode der kleinsten Quadrate ergibt einen Lösungsvektor  $\mathbf{f}$  für welchen die Bedingungen

$$\|\underline{\mathbf{L}}\mathbf{f} - \mathbf{p}\| = \min \quad \text{sowie} \quad \|\mathbf{f}\| = \min \quad (4.33)$$

erfüllt sind (Sweeney und Vest, 1973).

Die euklidische Norm des Vektors  $\mathbf{f}$  ist dabei definiert als

$$\|\mathbf{f}\| = (\mathbf{f}^T \mathbf{f})^{1/2} = \sqrt{\sum_{j=1}^J (f_j)^2}. \quad (4.34)$$

Die Lösung des Gleichungssystems (4.20) bezüglich  $\mathbf{f}$  ist formal gegeben durch

$$\mathbf{f} = \underline{\mathbf{L}}^{-g} \mathbf{p}, \quad (4.35)$$

wobei  $\underline{\mathbf{L}}^{-g}$  der generalisierten Inversen von  $\underline{\mathbf{L}}$  entspricht. Die exakte Form für die generalisierte Inverse ist vom aktuellen Problem abhängig. Für ein überbestimmtes Gleichungssystem, welches dadurch gekennzeichnet ist, dass mehr Gleichungen (Messwerte) als Unbekannte Größen (Gitterzellenwerte) gegeben sind, ergibt sich die generalisierte Inverse aus der Lösung nach der Methode der kleinsten Quadrate

$$(\underline{\mathbf{L}}^T \underline{\mathbf{L}}) \mathbf{f} = \underline{\mathbf{L}}^T \mathbf{p} \quad \text{und somit} \quad \mathbf{f} = (\underline{\mathbf{L}}^T \underline{\mathbf{L}})^{-1} \underline{\mathbf{L}}^T \mathbf{p} \quad (4.36)$$

zu (Menke, 1984)

$$\underline{\mathbf{L}}^{-g} = (\underline{\mathbf{L}}^T \underline{\mathbf{L}})^{-1} \underline{\mathbf{L}}^T. \quad (4.37)$$

Hierbei entspricht  $\underline{\mathbf{L}}^T$  der transponierten Matrix von  $\underline{\mathbf{L}}$  und  $(\underline{\mathbf{L}}^T \underline{\mathbf{L}})^{-1}$  der Inversen der Matrix  $\underline{\mathbf{L}}^T \underline{\mathbf{L}}$ .

Eine Abschätzung des Zusammenhangs zwischen der geschätzten Verteilung  $\mathbf{f}^{\text{est}}$  und der wahren Verteilung  $\mathbf{f}^{\text{true}}$  kann unter Verwendung von Gleichung (4.36) und Gleichung (4.20) erfolgen

$$\mathbf{f}^{\text{est}} = (\underline{\mathbf{L}}^T \underline{\mathbf{L}})^{-1} \underline{\mathbf{L}}^T \underline{\mathbf{L}} \mathbf{f}^{\text{true}}. \quad (4.38)$$

Der Zusammenhang zwischen der geschätzten Verteilung und der neu berechneten Verteilung wird als Modellauflösungsmatrix  $\underline{\mathbf{R}}_M$  mit

$$\underline{\mathbf{R}}_M = (\underline{\mathbf{L}}^T \underline{\mathbf{L}})^{-1} \underline{\mathbf{L}}^T \underline{\mathbf{L}} \quad (4.39)$$

bezeichnet (Menke, 1984) und es gilt somit

$$\mathbf{f}^{\text{est}} = \underline{\mathbf{R}}_M \mathbf{f}^{\text{true}}. \quad (4.40)$$

Die  $j$ -te Zeile von  $\underline{\mathbf{R}}_M$  entspricht dabei einem Wichtungsterm, welcher angibt, in welchem Maß der  $j$ -te Wert der neuen Verteilung  $\mathbf{f}^{\text{est}}$  durch die Werte der wahren Verteilung  $\mathbf{f}^{\text{true}}$  bestimmt wird.

Bei einer optimalen Rekonstruktion werden die Modellparameter unabhängig voneinander bestimmt. In diesem Fall ist die Modellauflösungsmatrix gleich der Einheitsmatrix, das heißt dass die Diagonalelemente dem Wichtungsfaktor 1 entsprechen, während alle weiteren Matrixelemente verschwinden.

Ein weiteres Kriterium für die Rekonstruktionsgenauigkeit ist die Datenauflösungsmatrix. Diese gibt die Abhängigkeit der gemessenen Linienintegralwerte  $\mathbf{p}^{\text{obs}}$  und der durch Vorwärtsmodellierung berechneten Parameter  $\mathbf{p}^{\text{pre}}$  an. Die Herleitung der Datenauflösungsmatrix  $\underline{\mathbf{R}}_D$  kann wiederum aus Gleichung (4.20) unter Verwendung von Gleichung (4.37) erfolgen. Es gilt



$$\mathbf{p}^{\text{pre}} = \mathbf{L}\mathbf{f}^{\text{est}} = \mathbf{L}(\mathbf{L}^T\mathbf{L})^{-1}\mathbf{L}^T\mathbf{p}^{\text{obs}}. \quad (4.41)$$

Die Datenauflösungsmatrix  $\mathbf{R}_D$  entspricht somit

$$\mathbf{R}_D = \mathbf{L}(\mathbf{L}^T\mathbf{L})^{-1}\mathbf{L}^T. \quad (4.42)$$

Ist  $\mathbf{R}_D$  gleich der Einheitsmatrix, existiert kein Vorhersagefehler bei den berechneten Strahlwerten. Jeder gemessene Wert ist gleich seinem aus der aktuellen Verteilung berechneten Wert. Allgemein entsprechen die Zeilen von  $\mathbf{R}_D$  wiederum Wichtungsfaktoren, die angeben, welche gemessenen Strahlinformationen zu einer berechneten Strahlinformation beitragen.

Ein weiterer Ansatz zur Abschätzung der Genauigkeit bei der tomographischen Bestimmung von Verteilungen bietet die Kovarianz der Modellparameter, welche den Zusammenhang zwischen den Werten innerhalb der einzelnen Gitterzellen widerspiegelt. Hierbei kann untersucht werden, inwiefern sich Unsicherheiten bei den Messdaten auf die rekonstruierten Verteilungen abbilden. Eine Abschätzung der Kovarianz zwischen den einzelnen Gitterzellenwerten ist gegeben durch

$$\text{cov}(\mathbf{f}) = \mathbf{f}\mathbf{f}^T = \begin{bmatrix} f_1f_1 & f_1f_2 & \cdots & f_1f_J \\ f_2f_1 & f_2f_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_Jf_1 & & \cdots & f_Jf_J \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

Um die Abhängigkeit der Modellparameter von Unsicherheiten in den Messdaten zu bestimmen, wird die Kovarianzmatrix, unter Betrachtung des Matrixproduktes  $\mathbf{L}^T\mathbf{L}$ , umgeformt. Unter der Annahme, dass die Unsicherheiten in den Eingangsdaten (Varianz der Messwerte  $\sigma_i^2$ ) unabhängig und im Mittel Null sind sowie durch einen konstanten Wert  $\sigma^2$  beschrieben werden können, lässt sich die Kovarianzmatrix schreiben als (Humphreys und Clayton, 1988; Menke, 1984)

$$\text{cov}(\mathbf{f}) = \sigma^2 (\mathbf{L}^T\mathbf{L})^{-1}. \quad (4.44)$$



## 5. Akustische Laufzeittomographie

Die akustische Laufzeittomographie beruht auf der Messung von Laufzeiten akustischer Signale um daraus Verteilungen von Temperatur und Strömungsgeschwindigkeiten in einem Untersuchungsgebiet zu bestimmen. Bei gegebener Anordnung von Schallsendern und Empfängern und bekannten Ausbreitungswegen können die Schalllaufzeiten in Werte der effektiven Schallgeschwindigkeit umgerechnet werden. Wie in Kapitel 2.2 dargestellt wurde, ist die Schallgeschwindigkeit in Luft im Wesentlichen von den Parametern Temperatur und Strömung entlang des Ausbreitungsweges abhängig. Die Messung dieser Parameter auf verschiedenen Ausbreitungswegen (vgl. Abbildung 26) bildet somit die Grundlage für eine tomographische Rekonstruktion der Verteilungen im Untersuchungsgebiet.

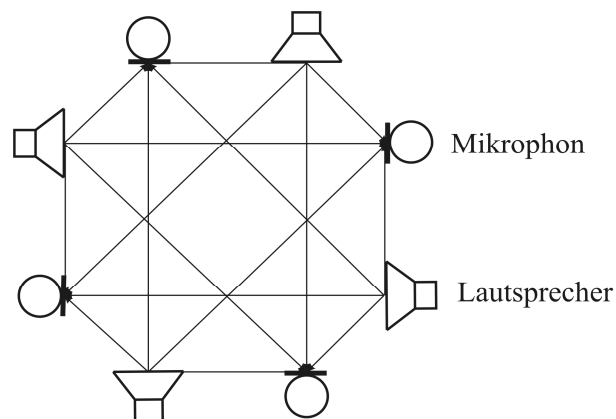


Abbildung 26: Schematische Darstellung zum Messprinzip der akustischen Laufzeittomographie. Ein Untersuchungsgebiet wird auf verschiedenen Wegen von Schallsignalen (Linien) durchquert, welche von Lautsprechern bzw. Mikrofonen an verschiedenen Orten gesendet bzw. empfangen werden. Die Bestimmung der Laufzeiten der Signale bei bekannten Ausbreitungswegen ermöglicht die Berechnung der effektiven Schallgeschwindigkeit und liefert somit Informationen über die Temperatur und Strömung entlang des Ausbreitungsweges.

Um das skalare Temperaturfeld und das vektorielle Strömungsfeld zu rekonstruieren, werden die beiden Einflussfaktoren zunächst voneinander getrennt. Im Anschluss werden die Parameter unabhängig voneinander behandelt und ihre Verteilung im Untersuchungsgebiet tomographisch rekonstruiert. Hierfür wird in beiden Fällen ein algebraisches Verfahren verwendet.

Als Eingangsdaten dienen die Messwerte (Laufzeiten), eine vorgegebene Gittergröße sowie die Positionen der Sender und Empfänger, welche zur Berechnung der Strahlverläufe innerhalb des Gitters benötigt werden. Das Vorgehen zur Rekonstruktion des Temperatur- und Strömungsfeldes selbst wird in den folgenden Abschnitten erläutert.

### 5.1.1. Trennung von Temperatur und Strömungseinfluss

Die effektive Schallgeschwindigkeit  $c_{\text{eff}}$  zwischen einem Sender-Empfänger-Paar lässt sich unter Annahme geradliniger Schallausbreitung aus der Laufzeit des akustischen Signals  $\tau_0$  und der geometrischen Entfernung der Sensoren  $d$  berechnen

$$c_{\text{eff}} = \frac{d}{\tau_0}. \quad (5.1)$$

Um Temperatur- und Strömungsfeld unabhängig voneinander rekonstruieren zu können, muss der skalare Einfluss der Temperatur vom vektoriellen Einfluss der Strömung auf die effektive Schallgeschwindigkeit (s. Gleichung (2.39)) getrennt werden. Hierfür werden die unterschiedlichen Charakteristika der zu trennenden Parameter ausgenutzt. Während sich der Temperatureinfluss auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit akustischer Signale richtungsunabhängig auswirkt, bewirkt die Strömung eine richtungsabhängige Änderung. Einer Erhöhung der effektiven Schallgeschwindigkeit entlang des Ausbreitungsweges in Strömungsrichtung steht eine Verringerung in Gegenwindrichtung mit demselben Betrag gegenüber (Abbildung 27).

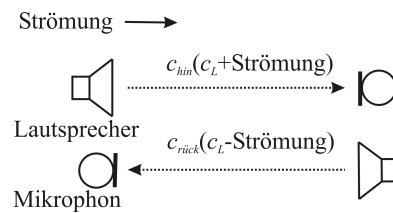


Abbildung 27: Prinzip zur Trennung des vektoriellen Strömungseinflusses und des skalaren Temperatureinflusses auf die effektive Schallgeschwindigkeit unter Verwendung von reziproken Schallstrecken.

Durch Summation bzw. Subtraktion der effektiven Schallgeschwindigkeiten entlang entgegengesetzter Schallausbreitungswege (Hin- und Rückweg) ergibt sich für den temperaturabhängigen Anteil, die Laplace'sche Schallgeschwindigkeit  $c_L$ , bzw. die Strömungskomponente entlang des Ausbreitungsweges  $v_{\text{Strahl}}$  (Arnold et al., 2004)

$$c_L = \frac{d}{2} \left( \frac{1}{\tau_{0,\text{hin}}} + \frac{1}{\tau_{0,\text{rück}}} \right) \quad \text{bzw.} \quad v_{\text{Strahl}} = \frac{d}{2} \left( \frac{1}{\tau_{0,\text{hin}}} - \frac{1}{\tau_{0,\text{rück}}} \right). \quad (5.2)$$

Die tomographische Rekonstruktion der meteorologischen Größen erfolgt nun unabhängig voneinander.

### 5.1.2. Rekonstruktion von Temperaturfeldern

Die tomographische Rekonstruktion von Verteilungen beruht auf der Analyse von Messwerten, welche entlang bestimmter Wege durch ein Untersuchungsgebiet gewonnen wer-

den. Bei algebraischen Methoden erfolgt eine Unterteilung des Untersuchungsgebietes in diskrete Teilgebiete (Kapitel 4.4). Nach Gleichung (4.18) kann der Zusammenhang zwischen den Messwerten und der Verteilung im Gitter in Abhängigkeit von den Strahlabschnittslängen innerhalb einer Gitterzelle beschrieben werden. Da die Größe Temperatur eine skalare Größe ist, beeinflusst sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit akustischer Signale richtungsunabhängig (Gleichung (2.35)). Für die tomographische Rekonstruktion ist daher lediglich die Länge der Strahlabschnitte in jeder Gitterzelle unabhängig von deren Verlauf ausschlaggebend.

Neben den Strahlinformationen dienen die temperaturabhängigen Schalllaufzeiten  $\tau_{0,L}$ , welche für den entsprechenden Schallweg aus der Laplace'schen Schallgeschwindigkeit  $c_L$  und der Laufweglänge  $d$  nach

$$\tau_{0,L} = \frac{d}{c_L} \quad (5.3)$$

bestimmt werden, als Eingangsdaten für die tomographische Rekonstruktion. Bei Betrachtung aller  $i = 1 \dots I$  Schallstrahlen kann das zu lösende lineare Gleichungssystem (4.18) zur Bestimmung der Temperaturverteilung aus akustischen Laufzeitmessungen in der Form

$$\tau_{0,L,i} = \sum_{j=1}^J l_{ij} \cdot s_j \quad \text{mit} \quad s_j = \frac{1}{c_{L,j}} \quad (5.4)$$

geschrieben werden. Der Wert  $s_j$  entspricht hierbei der inversen Laplace'schen Schallgeschwindigkeit in der  $j$ -ten Gitterzelle und wird als Langsamkeit bezeichnet. Die Berechnung der Zellenwerte erfolgt mit einem algebraischen Verfahren, der simultanen iterativen Rekonstruktionstechnik (SIRT; vgl. Kap. 4.4.3). Ausgangspunkt ist eine Anfangsverteilung von Zellenwerten für die Langsamkeiten  $s_j^0$ , welche durch Rückprojektion der Strahlinformationen auf das vorgegebene Tomographiegitter gewonnen werden

$$s_j^0 = \left\{ \sum_{i=1}^I \left( l_{ij} \cdot \tau_{0,L,i} / \sum_{j=1}^J l_{ij} \right) \right\} / \left\{ \sum_{i=1}^I l_{ij} \right\}. \quad (5.5)$$

Im Anschluss erfolgt die iterative Verbesserung der Lösung. Hierfür wird ausgehend von der aktuellen Verteilung  $k$  eine Korrektur der Zellenwerte bestimmt und eine neue Lösung  $k + 1$  aus der Lösung  $k$  berechnet

$$s_j^{k+1} = s_j^k + \Delta s_j. \quad (5.6)$$

Die Berechnung der Korrekturwerte für die Gitterzellen  $\Delta s_j$  erfolgt in Analogie zu Gleichung (4.27) in Abhängigkeit von der Differenz zwischen den gemessenen Strahlinformationen  $\tau_{0,L}$  und den Strahlinformationen  $\tau_L$ , welche aus der aktuellen Verteilung  $s_j$  bestimmt wurden. Im Gegensatz zu Gleichung (4.27) erfolgt die Wichtung der Korrekturwerte nicht ausschließlich in Abhängigkeit von der Schallstrahlänge, sondern ebenfalls abhängig von der Gesamtlänge aller Schallstrahlen, welche durch eine bestimmte Gitterzelle  $j$

verlaufen. Hieraus ergibt sich für die Korrekturwerte der Langsamkeiten  $\Delta s_j$  in jeder Gitterzelle  $j$

$$\begin{aligned} \Delta s_j &= \left\{ \sum_{i=1}^I \left[ l_{ij} \cdot (\tau_{0,L,i} - \tau_{L,i}) / \sum_{j=1}^J l_{ij} \right] \right\} / \left\{ \sum_{i=1}^I l_{ij} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^I \left[ l_{ij} \cdot \left( \tau_{0,L,i} - \sum_{j=1}^J l_{ij} s_j \right) / \sum_{j=1}^J l_{ij} \right] \right\} / \left\{ \sum_{i=1}^I l_{ij} \right\}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Des Weiteren wird bei der Rekonstruktion der Temperaturverteilung berücksichtigt, dass diese eine kontinuierliche Größe repräsentiert und die Gitterwerte selbst keine unabhängigen Größen darstellen. Um dieser Tatsache gerecht zu werden, wird eine Mittelung benachbarter Gitterelemente nach jedem Iterationsschritt bei der Rekonstruktion durchgeführt (Ziemann, 2000). Für die vorliegenden Untersuchungen erfolgt eine Unterscheidung zwischen direkt benachbarten Gitterzellen (oben, unten, links, rechts) und diagonal benachbarten Zellen (schräg oben bzw. unten; vgl. Abbildung 28). Das Gewicht  $w$ , mit welchem eine Gruppe benachbarte Zellen (direkt, Index dir oder diagonal, Index diag) bei der Mittelung berücksichtigt wird, ist frei wählbar. Die Berechnung des mittleren Zellenwertes für die betrachtete Gitterzelle  $s_{A,mit}$  erfolgt abhängig von der Anzahl direkter Nachbarzellen  $m$  und diagonalen Nachbarzellen  $n$  nach

$$s_{A,mit} = \frac{s_A + w_{diag} \cdot \sum_{j=1}^n s_{j,diag} + w_{dir} \cdot \sum_{j=1}^m s_{j,dir}}{1 + n \cdot w_{diag} + m \cdot w_{dir}}. \quad (5.8)$$

Die maximale Anzahl benachbarter Zellen beträgt acht ( $n = 4$ ,  $m = 4$ ). Befindet sich die aktuell betrachtete Gitterzelle am Rand des Untersuchungsgebietes, verringert sich die Anzahl der direkten und diagonalen Nachbarzellen entsprechend.

$s_{1,diag}$	$s_{1,dir}$	$s_{2,diag}$
$s_{4,dir}$	$s_A$	$s_{2,dir}$
$s_{4,diag}$	$s_{3,dir}$	$s_{3,diag}$

Abbildung 28: Ausschnitt aus dem tomographischen Gitter zur Demonstration der am Mittelungsprozess beteiligten Nachbarzellen. Die Mittelung erfolgt nach jedem Iterationsschritt zwischen den aktuellen Werten der Langsamkeiten  $s_j$  in den Gitterzellen. Eine Unterscheidung erfolgt für direkt benachbarte Zellenwerte ( $s_{j,dir}$ ) und diagonal benachbarte Zellenwerte ( $s_{j,diag}$ ) relativ zur aktuell betrachteten zentralen Zelle (Index A). Die Wichtungsfaktoren für diagonal benachbarte Zellen  $w_{diag}$  und direkt benachbarte Zellen  $w_{dir}$  sind frei wählbar.

Um eine optimale Kopplung der Gitterzellen zu finden, wurden Simulationen mit verschiedenen Temperaturverteilungen durchgeführt. Es wurden verschiedene Sender- und

Empfängergeometrien betrachtet, von denen im Folgenden ein Beispiel dargestellt ist. Für das Beispiel wurden die Lautsprecher und Mikrophone derart um ein  $2\text{ m} \times 2\text{ m}$  großes Messgebiet angeordnet, dass eine möglichst homogene Überdeckung des Messgebietes mit Schallstrecken gewährleistet war (Abbildung 29, links). Ein Maß für die Rekonstruktionsgenauigkeit der Gitterzellenwerte aus den Ausgangsdaten in Abhängigkeit von den Strahlverläufen durch das Tomographiegitter stellt die Kovarianzmatrix (Gleichung (4.44)) dar. Sie verdeutlicht, wie sich Unsicherheiten in den Ausgangsdaten auf die einzelnen Tomographiegitterzellen auswirken, wenn die Unsicherheiten in den Ausgangsgrößen zufällig verteilt und gleich groß sind. Hohe Werte entsprechen dabei einer größeren Unsicherheit der rekonstruierten Werte. Für die betrachtete Anordnung ist die Kovarianzmatrix ebenfalls in Abbildung 29 (rechts) dargestellt. Die symmetrische Anordnung der Schallsender und Empfänger spiegelt sich in der Kovarianzmatrix deutlich wider. Es ist festzustellen, dass der zentrale Teil des Gitters (alle Gitterzellen außer den Randzellen) mit nahezu homogenen Werten der Kovarianzmatrix belegt ist. Für die Rekonstruktionsergebnisse lässt sich somit ableiten, dass für den betrachteten Aufbau kein Bereich des Gitters durch stärkere Unsicherheiten belegt ist, als andere Teile des Gitters.

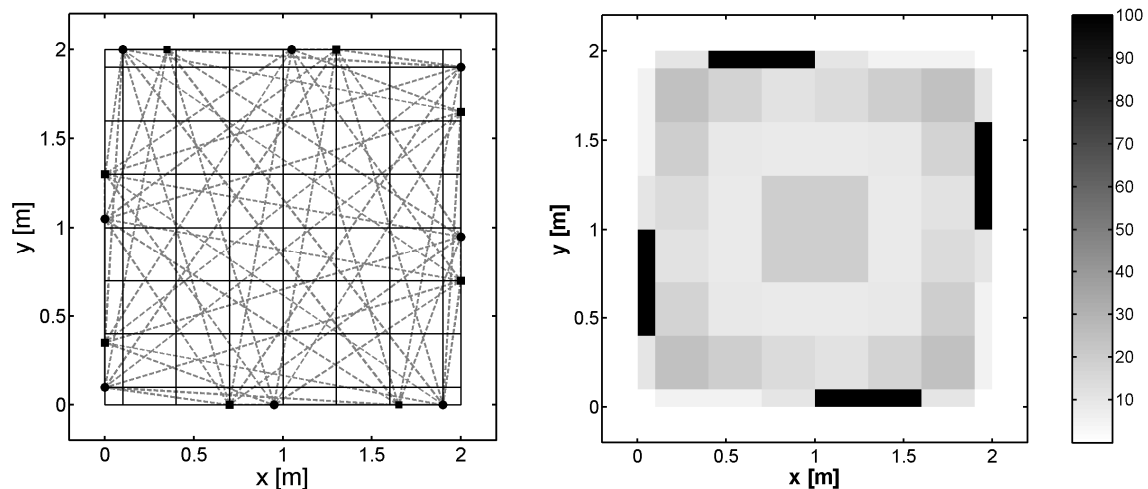


Abbildung 29: Links: Schematische Darstellung eines simulierten Aufbaus von Schallsendern (Quadrate) und Empfängern (Kreise), welche sich durch eine möglichst homogene Überdeckung des Messgebietes (Gesamtfläche:  $2\text{ m} \times 2\text{ m}$ ) mit Schalllaufstrecken (gestrichelte Linien) auszeichnet. Die Anzahl der Schallsender (8) und Empfänger (8) entspricht einer derzeit realisierbaren Anzahl akustischer Sensoren. Für die tomographische Rekonstruktion wurde die Messfläche in Teilflächen unterteilt (durchgezogene Linien), welche eine Ausdehnung von je  $0,3\text{ m} \times 0,3\text{ m}$  aufweisen. Rechts dargestellt sind die Diagonalelemente der Kovarianzmatrix zur betrachteten Versuchsanordnung.

Die Simulation der Temperaturverteilung innerhalb der Messfläche erfolgte mit einer räumlichen Auflösung von  $0,01\text{ m} \times 0,01\text{ m}$ , wodurch eine kontinuierliche Verteilung nachgebildet werden sollte. Die simulierten Verteilungen können in zwei Gruppen eingeteilt werden. Die erste Gruppe enthält lineare Temperaturänderung innerhalb des Tomogra-

phiegitters von kalt zu warm in verschiedenen Orientierungen und mit unterschiedlichen Temperaturgrenzen. Die zweite Gruppe entspricht einer konstanten Verteilung im gesamten Gebiet, welche durch einen warmen bzw. kühleren Temperaturbereich unterbrochen wird. Diese Felder wurden für alle Punkte  $(x,y)$  im Messgebiet unter Verwendung einer zweidimensionalen Gauss-Normalverteilung berechnet

$$T_{\text{av}}(x, y) = T_{\text{av},0} + dT_{\text{Max}} \cdot \exp \left\{ - \left[ \frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-y_0)^2}{2\sigma_y^2} \right] \right\}. \quad (5.9)$$

Hierbei sind  $T_{\text{av},0}$  die Hintergrundtemperatur und  $dT_{\text{Max}}$  die maximale Abweichung von der Hintergrundtemperatur am Punkt  $(x_0, y_0)$ . Die Standardabweichungen  $\sigma_x$  bzw.  $\sigma_y$  sind ein Maß für die Breite der Verteilung in der entsprechenden Raumrichtung ( $x$ - bzw.  $y$ -Richtung). Bei der Simulation von Temperaturverteilungen entsprechen daher große  $\sigma$ -Werte einer räumlich weit ausgedehnten Temperaturanomalie im Messgebiet im Vergleich zu kleinen  $\sigma$ -Werten.

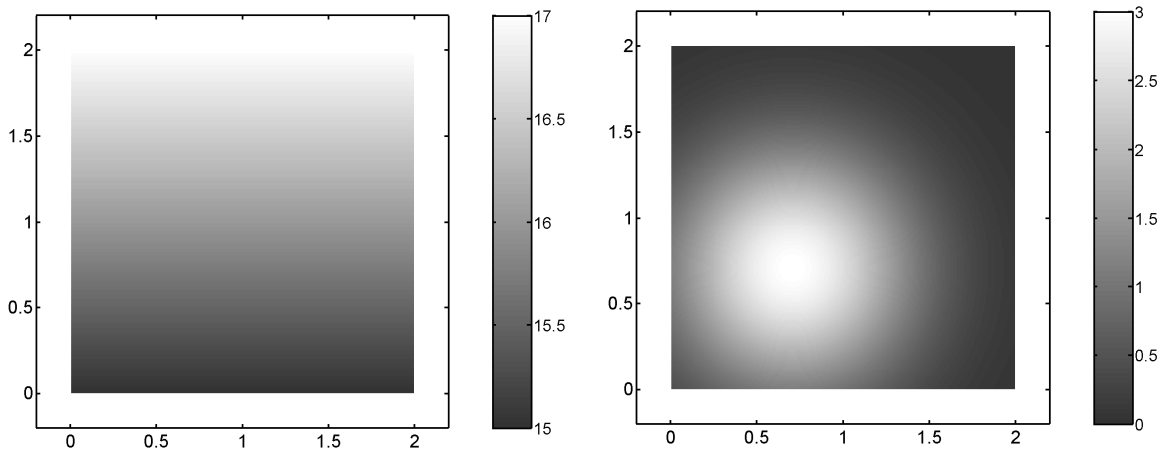


Abbildung 30: Simulierte Verteilungen zum Test der Rekonstruktionsgenauigkeit des tomographischen Verfahrens für das Messgebiet aus Abbildung 29. Links: Lineare Temperaturzunahme im Untersuchungsgebiet von 15°C (untere Messfeldgrenze) auf 17°C (obere Messfeldgrenze). Rechts: Lokale Temperaturanomalie innerhalb des Messfeldes, welche unter Verwendung der Gauss-Normalverteilung berechnet wurde. Die Hintergrundtemperatur beträgt 0°C, die Standardabweichung in beide Raumrichtungen 0,5. Die maximale Temperatur wird für  $(x,y) = (0,7; 0,7)$  erreicht und nimmt einen Wert von 3°C an.

Entsprechend der Anordnung der Sender und Empfänger wurden aus den simulierten Temperaturverteilungen Laufzeiten für alle Schallstrahlen berechnet. Diese dienten als Ausgangsgrößen für die tomographische Rekonstruktion. Um die Rekonstruktionsgenauigkeit des tomographischen Algorithmus zu untersuchen, wurde die Rekonstruktionsgenauigkeit für verschiedene Temperaturverteilungen und Mittelungsparameter in Abhängigkeit von der Anzahl der Iterationsschritte analysiert. Als Genauigkeitskriterium wurde zum einen der Unterschied zwischen den gemessenen (simulierten) Laufzeitdaten und den aus



der aktuellen Verteilung berechneten Laufzeitwerten nach Gleichung (4.26) bestimmt. Zum anderen wurden die Unterschiede der rekonstruierten und vorgegebenen Verteilungen selbst nach Gleichung (4.25) berechnet.

Abbildung 31 zeigt die Abhängigkeit der Differenz zwischen den Laufzeitwerten für verschiedene Mittelungsparameter in Abhängigkeit vom Iterationsschritt. Alle dargestellten Differenzen zeigen eine Abnahme mit zunehmendem Iterationsschritt. Die Laufzeitdaten, welche aus den Verteilungen berechnet werden, weichen somit immer weniger von den gemessenen Daten ab. Da die Berechnung der neuen Verteilung in Abhängigkeit von den Laufzeitdifferenzen erfolgt, werden auch die Korrekturwerte mit wachsendem Iterationsschritt geringer. Des Weiteren zeigt sich für alle Laufzeitdifferenzen, dass die größte Abnahme während der ersten 10 Iterationsschritte stattfindet. Weitere Iterationen bringen für einzelne Rekonstruktionsszenarien weitere Verbesserungen.

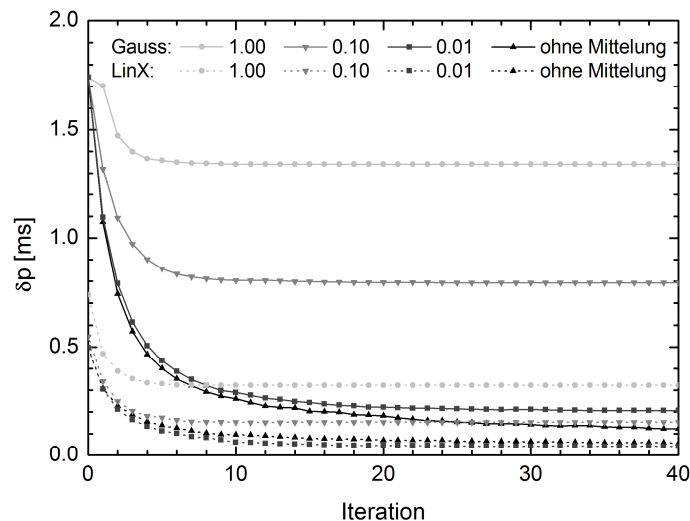


Abbildung 31: Abhängigkeit der Differenz zwischen den aus den aktuellen Gitterwerten berechneten Laufzeitdaten und den simulierten Laufzeiten für zwei simulierte Temperaturverteilungen (Gauss: Temperatur-anomalie, welche mit Hilfe einer Gauss-Normalverteilung simuliert wurde; LinY: lineare Temperaturänderung in y-Richtung). Dargestellt sind die Laufzeitdifferenzen, welche ohne Mittelung berechnet wurden sowie diejenigen, bei welchen eine Mittelung zwischen der aktuell betrachteten Gitterzelle und den Nachbarzellen durchgeführt wurde. Die Gewichte der direkten und diagonalen Nachbarzellen waren hierbei gleich groß und sind für die entsprechende Linie angegeben.

Eine Unterscheidung zwischen den simulierten Temperaturverteilungen (lineare Verteilung in y-Richtung: LinY) und einer Temperaturanomalie, welche mit Hilfe einer Gauss-Normalverteilung nachgebildet wurde (Gauss) zeigen, dass die Laufzeitdifferenzen deutlich vom gewählten Mittelungsgewicht abhängen. In beiden Fällen bewirkt eine starke Mittelung (Mittelungsgewicht: 1,00), dass die Laufzeitdifferenzen zu einem hohen Absolutwert konvergieren. Je geringer das Gewicht benachbarter Zellen bei der Mittelung ist (Minimum: 0,00; keine Mittelung), desto geringer das Konvergenzniveau für die Laufzeitdifferenzen bei hohen Iterationszahlen.

Für die simulierten Verteilungen wurden ebenfalls die euklidischen Abstände der Zellenwerte selbst von den simulierten Verteilungen berechnet. Beispielhafte Ergebnisse für die beschriebenen Simulationen sind in Abbildung 32 dargestellt. Diese umfasst sowohl den Bereich mit geringen Iterationszahlen ( $< 50$ ) als auch hohe Iterationszahlen bis hin zu 500 Iterationsschritten. Der Anfangsbereich ist wiederum für alle Rekonstruktionsszenarien durch einen starken Abfall der Differenzwerte gekennzeichnet. Die unterschiedlichen Verläufe ergeben sich aus der unterschiedlichen Behandlung der Zellenwerte bei der Mittelung. Ein hohes Gewicht bei der Mittelung bewirkt, dass die Verteilungsdifferenzen auf einem vergleichsweise hohen Niveau gehalten werden. Je geringer das Gewicht benachbarter Zellen bei der Mittelung, desto kleiner werden die Differenzwerte. Eine Ausnahme hierbei bilden die Fälle, in denen keine Mittelung durchgeführt wird, sondern jede Zelle isoliert rekonstruiert wird. Die Differenzen der rekonstruierten Zellenwerte von den simulierten Feldern bleiben in diesem Fall deutlich größer als wenn eine geringfügige Mittelung, z. B. mit dem Gewicht 0,01, durchgeführt wird.

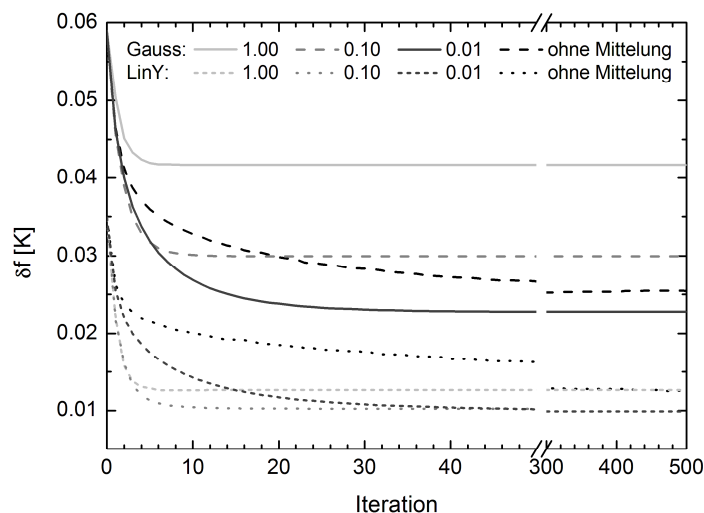


Abbildung 32: Abhängigkeit der Differenzen zwischen den vorgegebenen (simulierten) Temperaturverteilungen und den rekonstruierten Werten für eine lineare Temperaturänderung in  $y$ -Richtung (LinY) und eine gaussförmige Temperaturanomalie (Gauss). Die Berechnung der Differenzenwerte erfolgte für die original simulierte (hochaufgelöste) und die rekonstruierte Verteilung.

Der von Gilbert (1970) beschriebene erneute Anstieg der Differenzenwerte ist in den dargestellten Beispielen kaum sichtbar. Lediglich bei der gaussförmigen Temperaturanomalie lässt sich im Bereich hoher Iterationsschritte ein leichter Wiederanstieg erkennen, wenn keine Mittelung angewendet wird. Für andere Verteilungen bzw. Anordnungen der Sender und Empfänger ist dieser Effekt deutlicher sichtbar. Für die Rekonstruktionsergebnisse mit Mittelung konnte hingegen bei keinem Simulationsfall ein derartiges Verhalten nachgewiesen werden.

Ein Beispiel für das Rekonstruktionsergebnis einer vorgegebenen gaussförmigen Temperaturanomalie (vgl. Abbildung 30, rechts) nach 50 Iterationsschritten ist in Abbildung 33 (rechts) dargestellt. Die Rekonstruktion erfolgte unter Berücksichtigung benachbarter Gitterzellenwerte (Mittelung mit einer Wichtung von 0,01). Zur besseren Vergleichbarkeit des Rekonstruktionsergebnisses mit der simulierten Verteilung wurden die hochaufgelösten simulierten Temperaturwerte entsprechend der Tomographiegitterweite gemittelt (Abbildung 33, links).

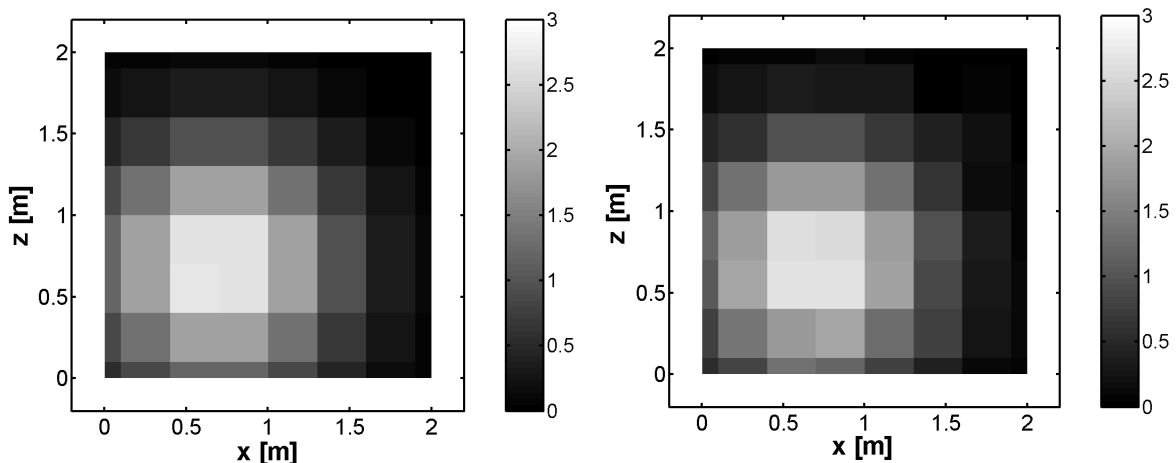


Abbildung 33: Auf die Gitterweite für die tomographische Rekonstruktion gemittelte simulierte Verteilung in Form einer lokalen Temperaturanomalie (links) sowie das Rekonstruktionsergebnis nach 50 Iterationsschritten unter Verwendung einer Mittelungsprozedur mit der Wichtung 0,01 für alle benachbarten Gitterzellenwerte.

Die rekonstruierten Gitterwerte zeigen eine deutliche Übereinstimmung mit den vorgegebenen Werten. Dies spiegelt sich ebenfalls im Wert für die mittlere quadratische Abweichung der Zellenwerte wider (vgl. Abbildung 32). Für die betrachtete vorgegebene Verteilung (Gaussverteilung), die Anzahl von Rekonstruktionsschritten (50) sowie die Parameter des Mittelungsalgorithmus ist die mittlere quadratische Abweichung der simulierten und rekonstruierten Temperaturwerte innerhalb der Gitterzellen kleiner als 0,03 K.

Aus den obigen Betrachtungen lässt sich ableiten, dass die Rekonstruktion der Temperaturverteilung in den meisten Fällen unter Verwendung einer schwachen Mittelung durchgeführt werden sollte. Die Mittelung bewirkt bei der Rekonstruktion der Verteilungen eine geringe Kopplung der Zellenwerte, welche wiederum zu einer möglichst geringen Abweichung zwischen simulierten und rekonstruierten Verteilungen führt.

### 5.1.3. Rekonstruktion von Strömungsfeldern

Die tomographische Rekonstruktion von Vektorfeldern kann in ähnlicher Weise wie die Rekonstruktion skalarer Felder erfolgen (Sparr und Stråhlén, 1998; Stråhlén, 1999). Hierfür wurde der algebraische Rekonstruktionsalgorithmus für skalare Felder (vgl. Kapitel

5.1.2) unter Anlehnung an die Arbeiten von Hauck (1990) für die Anwendung zur Rekonstruktion von Vektorfeldern (richtungsabhängige Größen) angepasst (Barth et al., 2007). Im Gegensatz zu skalaren Feldern erfordern Vektorfelder eine Erfassung der Messdaten, welche abhängig von der Richtung des Schallstrahlverlaufes durch das tomographische Gitter ist. Die gemessenen Werte (Informationen entlang der einzelnen Schallstrahlen) müssen daher derart analysiert werden, dass aus ihnen die Richtungskomponenten des gesuchten Vektorfeldes bestimmt werden können (vgl. Abbildung 34).

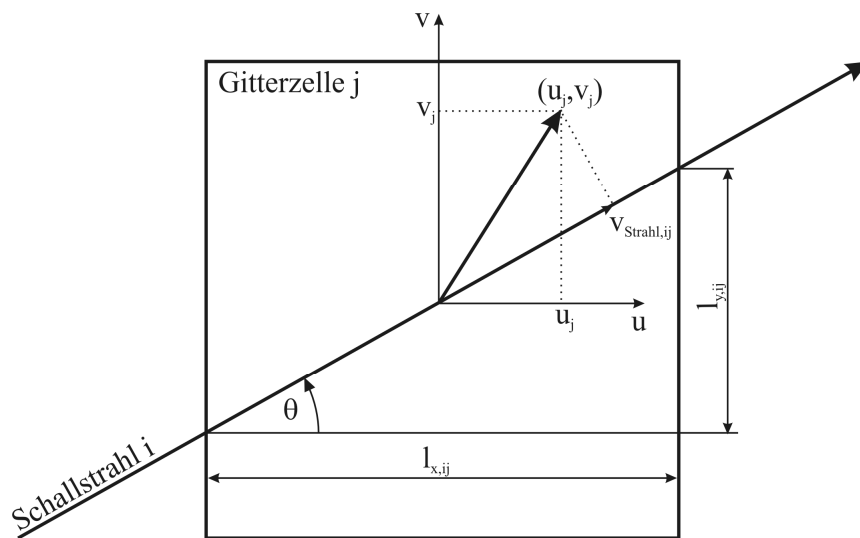


Abbildung 34: Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeitskomponente entlang des  $i$ -ten Schallstrahls in der  $j$ -ten Gitterzelle  $v_{\text{Strahl},ij}$  und der vorherrschenden mittleren Strömung  $(u_j, v_j)$  innerhalb dieser Zelle.

Als Eingangsgrößen für die tomographische Strömungsrekonstruktion dienen die Geschwindigkeitsinformationen entlang der Schallstrahlen  $v_{\text{Strahl},i}$ , welche durch Subtraktion der effektiven Schallgeschwindigkeiten entlang entgegengesetzter, paralleler Strecken gewonnen wurden (vgl. Kapitel 5.1.1). Das zu lösende lineare inverse Problem (4.18) für die Rekonstruktion eines Strömungsfeldes  $\mathbf{v}_j = (u_j, v_j)$  für alle Gitterzellen  $j = 1 \dots J$  im Untersuchungsgebiet lässt sich damit schreiben als

$$v_{\text{Strahl},i} = \frac{\sum_{j=1}^J l_{ij} (u_j \cdot \cos \theta + v_j \cdot \sin \theta)}{l_i}. \quad (5.10)$$

Hierbei entspricht der Ausdruck in Klammern der Projektion der Geschwindigkeitskomponenten in der  $j$ -ten Gitterzelle,  $u_j$  und  $v_j$ , auf den Ausbreitungsweg des Schallstrahles. Der Faktor  $l_{ij}$  ist die Strahlstüklänge des  $i$ -ten Schallstrahles innerhalb der  $j$ -ten Gitterzelle und der Quotient  $l_i$  entspricht der Gesamtlänge des  $i$ -ten Schallstrahles durch das Tomographiegitter.

Betrachtet man die richtungsabhängige Schallausbreitung, so lässt sich die Schallweglänge des  $i$ -ten Schallstrahles innerhalb der  $j$ -ten Gitterzelle in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung  $l_{x,ij}$  bzw.  $l_{y,ij}$  in Abhängigkeit des Anstiegswinkels  $\theta$  des Strahlverlaufes bezüglich der Abszisse schreiben als

$$\begin{pmatrix} l_{x,ij} \\ l_{y,ij} \end{pmatrix} = l_{ij} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Gleichung (5.10) lässt sich damit zu

$$v_{\text{Strahl},i} = \frac{\sum_{j=1}^J (l_{x,ij} \cdot u_j + l_{y,ij} \cdot v_j)}{l_i} \quad (5.12)$$

umformen.

Die Rekonstruktion der Geschwindigkeitsverteilung im Tomographiegitter erfolgt analog zur Temperaturrekonstruktion durch Initialisierung des iterativen Prozesses mit einer Verteilung  $\mathbf{v}_{0,j}$ , welche aus der Rückprojektion der Komponenten der gemessenen Strahlinformationen gewonnen wird

$$\mathbf{v}_{0,j} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{0,j} = \frac{\sum_{i=1}^I (l_{x,ij} \cdot v_{x,\text{Strahl},i} + l_{y,ij} \cdot v_{y,\text{Strahl},i})}{\sum_{i=1}^I l_{ij}}. \quad (5.13)$$

Die Komponenten der Strömungsinformation in Strahlrichtung bezüglich  $x$ - und  $y$ -Koordinate werden dabei nach

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}_{\text{Strahl}} = v_{\text{Strahl}} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

bestimmt.

Ausgehend von der Anfangsverteilung für die Strömung erfolgt die tomographische Rekonstruktion des Strömungsfeldes mit einem iterativen algebraischen Verfahren. Analog zur Rekonstruktion skalarer Felder wird nach einer Verteilung von Strömungswerten innerhalb der vorgegebenen Gitterzellen gesucht. Diese ergeben sich aus den Abweichungen zwischen den gemessenen Strömungswerten entlang der einzelnen Schallstrahlen  $v_{\text{obs,Strahl},i}$  und den nach Gleichung (5.12) aus den aktuell geschätzten Zellen Daten bestimmten Werten  $v_{\text{mod,Strahl},i}$  mit

$$v_{\text{mod,Strahl},i} = \frac{\sum_{j=1}^J (u_j \cdot l_{x,ij} + v_j \cdot l_{y,ij})}{\sum_{j=1}^J l_{ij}}. \quad (5.15)$$

Die Korrekturwerte für die Strömungsdaten innerhalb des Tomographiegitters  $\Delta \mathbf{v}_j$  lassen sich aus der aktuellen Verteilung nach

$$\Delta \mathbf{v}_j = \begin{pmatrix} \Delta u_j \\ \Delta v_j \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^I \left[ \begin{pmatrix} |l_{x,ij}|/N_{x,j} \\ |l_{y,ij}|/N_{y,j} \end{pmatrix} \cdot (v_{\text{obs,Strahl},i} - v_{\text{mod,Strahl},i}) \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right] \quad (5.16)$$

berechnen. Die Variablen  $N_{x,j}$  bzw.  $N_{y,j}$  bezeichnen hierbei die Summe der Strahlabschnitte aller Schallstrahlen innerhalb der  $j$ -ten Gitterzelle in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung mit

$$N_{x,j} = \sum_{i=1}^I |l_{x,ij}| \quad \text{bzw.} \quad N_{y,j} = \sum_{i=1}^I |l_{y,ij}|. \quad (5.17)$$

Die iterative Verbesserung der Lösung nach  $k + 1$  Iterationen erfolgt durch Summation der Strömungsverteilung nach Iterationsschritt  $k$  und den aus diesen Daten berechneten Korrekturwerten wie folgt

$$\mathbf{v}_j^{k+1} = \mathbf{v}_j^k + \Delta \mathbf{v}_j^k. \quad (5.18)$$

Analog zur Rekonstruktion von Temperaturverteilungen wurde auch bei der Berechnung der Strömungsfelder ein Mittelungsalgorithmus implementiert (vgl. Kapitel 5.1.2). Dieser erlaubt die Kopplung benachbarter Gitterzellenwerte, wobei die Strömungskomponenten getrennt betrachtet werden.

Zum Test der Rekonstruktionseigenschaften des Algorithmus wurden verschiedene Strömungsverteilungen innerhalb eines Untersuchungsgebietes vorgegeben. Die Simulationen erfolgten wiederum für eine Messfeldgröße von  $2 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ . Der Verlauf der Schallstrahlen durch das Gebiet entspricht der Anordnung in Abbildung 29 (links). Ausgehend von dieser vorgegebenen Verteilung von Schallstrecken erfolgte eine Übertragung der simulierten Strömungsverteilung in Geschwindigkeitsinformationen entlang der unterschiedlichen Ausbreitungswege. Diese Daten repräsentieren Strömungsmessdaten und dienen als Eingangsdaten für die tomographische Rekonstruktion der Strömungsverteilung.

Im Folgenden werden die Rekonstruktionsergebnisse zweier Strömungsfelder dargestellt und analysiert. Zum einen wurde ein homogenes Strömungsfeld simuliert, dessen Geschwindigkeit im gesamten Messgebiet konstant ist. Die Komponenten des Strömungsfeldes betragen  $u = 1,2 \text{ m s}^{-1}$  und  $v = 0,0 \text{ m s}^{-1}$ . Zum anderen wurde ein Wirbelfeld simuliert, dessen Komponenten  $u$  und  $v$  im Punkt  $\mathbf{r} = (x, y)$  nach

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \tan \varphi = \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad (5.19)$$

berechnet wurden. Das Zentrum des Wirbels wird über den Parameter  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$  und die Stärke des Wirbelfeldes durch den Faktor  $\Gamma$  festgelegt. Positive Werte für  $\Gamma$  bewirken eine zyklonale Umströmung, negative Werte eine antizyklonale Umströmung des Zentrums.

Für die Berechnung des simulierten Wirbelfeldes wurden die Parameter  $\mathbf{r}_0 = (1 \text{ m}, 1 \text{ m})$  und  $\Gamma = -5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  (antizyklonale Umströmung) gewählt. Die räumliche Auflösung der simulierten Strömungsdaten betrug  $0,05 \text{ m} \times 0,05 \text{ m}$ .

Die Rekonstruktion der Strömungsfelder im Untersuchungsgebiet erfolgte für eine Gitterzellengröße von  $0,3 \text{ m} \times 0,3 \text{ m}$  unter Verwendung verschiedener Wichtungsfaktoren für die Mittelung benachbarter Gitterzellen während der iterativen Lösung des tomographischen Problems. In Abbildung 35 sind die mittleren quadratischen Differenzen zwischen den vorgegebenen und den aus der aktuellen Verteilung berechneten Geschwindigkeitswerten entlang der Schallstrahlen (vgl. Gleichung (4.26)) für die ersten 40 Iterationsschritte dargestellt. Der Wichtungsfaktor für die Einbeziehung benachbarter Zellen bei der Rekonstruktion wurde zwischen 0 (ohne Mittelung) und 1 variiert.

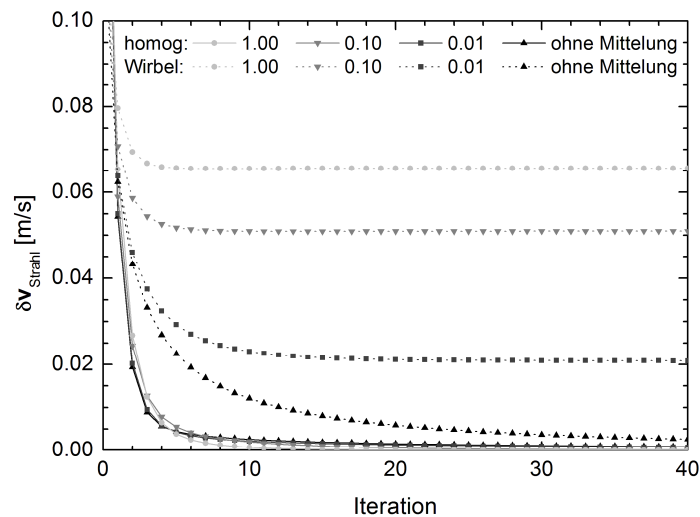


Abbildung 35: Abhängigkeit der Differenzen zwischen den Strahlgeschwindigkeiten, welche aus den simulierten Strömungsdaten berechnet wurden und denjenigen, welche aus der aktuell rekonstruierten Verteilung innerhalb des Messgebietes bestimmt wurden (homog: Homogenes Strömungsfeld, Wirbel: Wirbelfeld). Die angegebenen Parameter entsprechen unterschiedlichen Gewichten bei der Mittelung benachbarter Gitterzellenwerte, wobei keine Unterscheidung zwischen direkt und diagonal benachbarten Gitterzellen erfolgte.

Für alle betrachteten Analysen ist die Abnahme der Differenzwerte mit wachsender Iterationszahl deutlich erkennbar. Des Weiteren wird der starke Einfluss der Mittelung bei der Rekonstruktion des Wirbelfeldes deutlich. Die geringsten Differenzen zwischen den Strahlgeschwindigkeiten werden für die Rekonstruktion ohne Mittelung erreicht. Maximale Differenzen ergeben sich bei Mittelung mit vergleichsweise starker Beeinflussung der aktuell betrachteten Gitterzelle von den benachbarten Zellen (starke Kopplung). Diese Abhängigkeit vom Wichtungsfaktor tritt bei dem homogenen Strömungsfeld nicht auf. Ursache hierfür ist die Konstanz der Strömungskomponenten in allen Gitterzellen, so dass der Einfluss der Mittelung einer Zelle mit benachbarten Zellen keinen Beitrag zur Verbesserung der Lösung leistet.

Im Gegensatz zur Betrachtung der Differenzen zwischen den Strahlgeschwindigkeiten sind in Abbildung 36 die mittleren quadratischen Abweichungen zwischen den Gitterwerten selbst (euklidische Abstände) dargestellt.

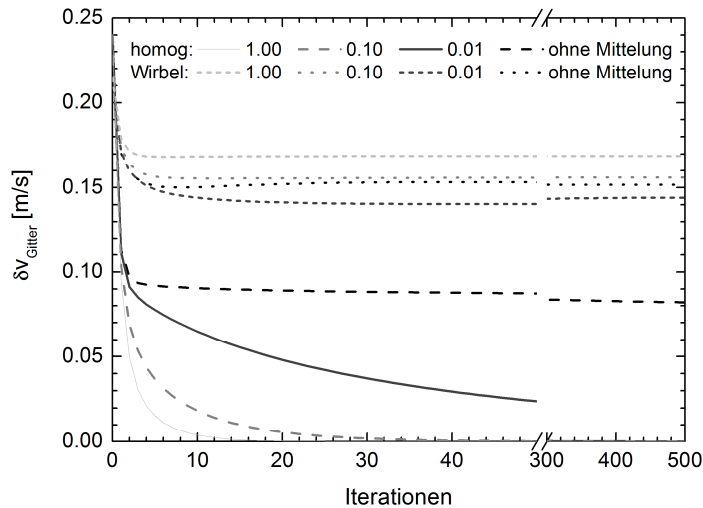


Abbildung 36: Abhängigkeit der Differenzen  $\delta v_{\text{Gitter}} = (\delta v_x^2 + \delta v_y^2)^{1/2}$  zwischen rekonstruierten und vorgegebenen Strömungskomponenten innerhalb des Messgebietes für ein homogenes Strömungsfeld (homog) und ein Wirbelfeld (Wirbel). Die angegebenen Parameter bezeichnen die Wichtungsfaktoren, welche bei der Mittelung benachbarter Gitterzellen angewendet wurden.

Als Indikator dient der Betrag der Geschwindigkeitsdifferenzen  $\delta v_{\text{Gitter}}$ , welcher den Betrag der vektoriellen Differenzen darstellt und sich aus den euklidischen Abständen der Komponenten in den Gitterzellen berechnen lässt

$$\delta v_{\text{Gitter}} = |\delta \mathbf{v}| = \sqrt{\delta v_x^2 + \delta v_y^2} \quad \text{mit} \quad \delta \mathbf{v} = (\delta v_x, \delta v_y). \quad (5.20)$$

Hierbei sind die euklidischen Abstände der Komponenten innerhalb des Gitters gegeben durch

$$\delta v_x = \frac{1}{J} \sqrt{\sum_{j=1}^J (v_{x,j}^{\text{sim}} - v_{x,j}^{\text{mod}})^2} \quad \text{bzw.} \quad \delta v_y = \frac{1}{J} \sqrt{\sum_{j=1}^J (v_{y,j}^{\text{sim}} - v_{y,j}^{\text{mod}})^2}, \quad (5.21)$$

wobei "sim" die vorgegebene (simulierte) Verteilung und "mod" die bei der aktuellen Iteration für das Gitter berechnete Verteilung kennzeichnet.

Die euklidischen Abstände verringern sich zunächst mit wachsender Iterationszahl bei allen dargestellten Szenarien. Bei den Daten des Wirbelfeldes fällt jedoch auf, dass die Werte für einzelne Fälle nach Erreichen eines Minimums erneut leicht ansteigen. Dieses Verhalten tritt insbesondere dann auf, wenn keine oder nur eine geringe Kopplung zwischen den Gitterzellenwerten erfolgt. Ebenfalls deutlich wird die Abhängigkeit des Ergebnisses von der Mittelungsprozedur selbst, welche sich nicht nur auf die Daten des Wirbelfeldes, sondern ebenfalls auf die rekonstruierten Werte des homogenen Feldes auswirken.



Bei der Analyse des homogenen Feldes kann festgestellt werden, dass die beste Übereinstimmung der vorgegebenen mit der rekonstruierten Verteilung (kleinste euklidische Abstände) am schnellsten für eine möglichst starke Kopplung benachbarter Zellen erreicht wird (Wichtungsfaktor: 1,0). Kleine Werte für die euklidischen Abstände werden auch bei schwacher Kopplung erreicht, allerdings muss in diesem Fall zum Erreichen derselben Größenordnung eine größere Zahl von Iterationen durchgeführt werden. Erfolgt keine Kopplung der Zellenwerte, nehmen die euklidischen Abstände zunächst auch ab, stagnieren aber bei einem Wert, der deutlich über den Werten liegt, welche bei einer Kopplung benachbarter Zellenwerte erreicht wird.

Die Untersuchung des Wirbelfeldes zeigt, dass die besten Ergebnisse (Unterschiede zwischen der vorgegebenen und der rekonstruierten Verteilung sind minimal) bei einer schwachen Kopplung erreicht werden. In allen anderen Fällen (starke Kopplung, keine Mittelung) liegen die Werte der euklidischen Abstände für alle Iterationsschritte deutlich über diesen Werten.

Ursache für die Verschiedenheit der Abhängigkeit der euklidischen Abstände von der Kopplung der Gitterzellen liegt in den Eigenschaften der Felder begründet. Bei der homogenen Verteilung sind alle Zellen mit denselben Werten für die Strömungskomponenten belegt. Die Mittelung bewirkt daher eine schnellere Konvergenz des Algorithmus zu dieser homogenen Verteilung. Im Falle des Wirbelfeldes unterscheiden sich benachbarte Zellen deutlich voneinander. Eine starke Kopplung bewirkt hier ebenfalls eine Homogenisierung, die aber in diesem Fall nicht erwünscht ist.

In Abbildung 37 sind beispielhaft zwei Rekonstruktionsergebnisse (schwarze Pfeile) des simulierten Wirbelfeldes (graue Pfeile) nach 50 Iterationsschritten dargestellt. Zur besseren Vergleichbarkeit wurde das räumlich hoch aufgelöste simulierte Strömungsfeld auf die Tomographiegittergröße umgerechnet. Die Rekonstruktion des linken Feldes erfolgte mit schwacher Kopplung der Gitterzellenwerte, d. h. bei der Rekonstruktion erfolgte eine Mittelung benachbarter Gitterzellenwerte, wobei die Wichtungsfaktoren für direkt und diagonal benachbarte Gitterzellen jeweils 0,01 betragen. Die Rekonstruktion auf der rechten Seite erfolgte mit starker Kopplung. Der Wichtungsfaktor betrug hier 1,0. Beide Rekonstruktionsergebnisse geben die Parameter des Wirbelfeldes (antizyklonale Strömung, Wirbelzentrum im Mittelpunkt des Rekonstruktionsgebietes) wieder, sind jedoch durch charakteristische Abweichungen bezüglich des vorgegebenen Feldes gekennzeichnet, welche auf die Kopplung der Zellenwerte zurückgeführt werden kann.

Bei der Rekonstruktion des Strömungsfeldes mit starker Kopplung benachbarter Gitterzellenwerte wird die Strömungsrichtung in nahezu allen Gitterzellen gut abgebildet. Deutliche Abweichungen treten jedoch hinsichtlich der Geschwindigkeitsbeträge auf, welche im Wirbelzentrum deutlich unterschätzt und in den Randbereichen leicht überschätzt werden. Diese Unter- bzw. Überschätzung ist Ursache für die hohen Differenzwerte zwischen vorgegebener (simulierter) und rekonstruierter Strömungsverteilung (vgl. Abbildung 36).

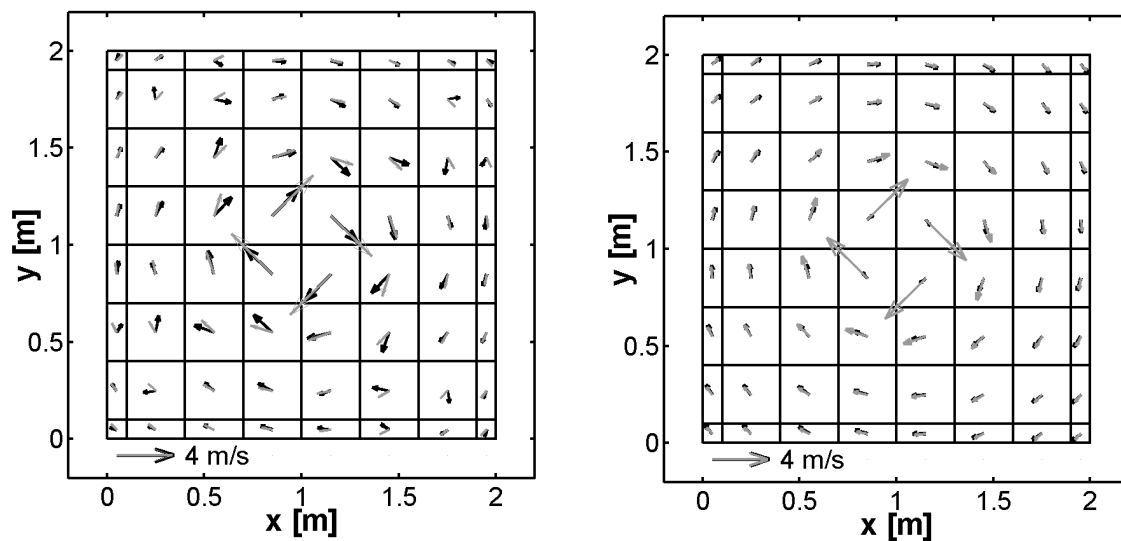


Abbildung 37: Vergleich zwischen rekonstruiertem Strömungsfeld nach 50 Iterationsschritten (schwarze Pfeile) und simuliertem Strömungsfeld (graue Pfeile), welches zur besseren Vergleichbarkeit auf die Gitterweite des Tomographiegitters interpoliert wurde. Die Parameter des simulierten Strömungsfeldes sind  $r_0 = (1 \text{ m}, 1 \text{ m})$  und  $\Gamma = -5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . Links: Rekonstruiertes Wirbelfeld mit einer schwachen Kopplung benachbarter Zellenwerte bei der Rekonstruktion (Wichtungsfaktor für die Mittelung 0,01), rechts: rekonstruiertes Wirbelfeld mit starker Kopplung benachbarter Zellen bei der Rekonstruktion (Wichtungsfaktor 1,0). Die grauen Pfeile sind in beiden Darstellungen identisch, da von derselben simulierten Strömungsverteilung ausgegangen wurde.

Im Gegensatz dazu bewirkt eine schwache Kopplung, dass die Geschwindigkeitsbeträge in den zentralen Bereichen deutlich besser wiedergegeben werden, obgleich die Beträge in den zentralen Zellen ebenfalls leicht unterschätzt werden. Die Übereinstimmung mit der vorgegebenen Verteilung ist jedoch deutlich besser im Vergleich zur Rekonstruktion mit starker Kopplung. In den Randbereichen, mit geringeren Geschwindigkeitswerten, sind lediglich geringe Abweichungen festzustellen. Zum Teil deutliche Abweichungen treten bei der Wiedergabe der Windrichtung bei kleinen Geschwindigkeiten (in den Randbereichen des Untersuchungsgebietes) auf.

Weitere Beispiele rekonstruierter Strömungsfelder in Abhängigkeit von den gewählten Rekonstruktionsparametern (Wichtungsfaktoren für die Mittelung und Anzahl der Iterationsschritte) sind in Anhang B zusammengestellt. Es zeigt sich, dass eine starke Kopplung zwischen den Gitterzellen eine schnellere Annäherung des Rekonstruktionsergebnisses an die endgültige Lösungsverteilung bewirkt. Diese weicht jedoch im Fall des Wirbelfeldes im zentralen Teil des Rekonstruktionsgebietes deutlich von den vorgegebenen Geschwindigkeitswerten ab. Es zeigt sich jedoch ebenfalls, dass bei geringer bzw. ohne Interpolation zwischen den Gitterzellenwerten zum Teil deutliche Abweichungen zwischen den Strömungsrichtungen des vorgegebenen und des rekonstruierten Feldes auftreten. Im Fall des homogenen Feldes erfolgt eine Annäherung der Lösung an die vorgegebene Verteilung für eine große Anzahl von Iterationen, während die Abweichungen ohne Kopplung der Zellen auch nach vielen Iterationsschritten bestehen bleiben.

---

Bei realen Messungen ist die gesuchte Verteilung der Strömung im Untersuchungsgebiet im Allgemeinen nicht bekannt. Es muss daher möglichst eine von der Verteilung unabhängige Rekonstruktionsvorschrift verwendet werden. Bei den Simulationen hat es sich als vorteilhaft erwiesen, eine schwache Kopplung zwischen den Gitterzellen zuzulassen. Diese bewirkt, dass die Unterschiede zwischen einer vorgegebenen und der daraus rekonstruierten Verteilung von Strömungsfeldern minimal werden. Die Annäherung der rekonstruierten an die vorgegebene Verteilung erfolgt bei geringer Kopplung der Zellenwerte jedoch langsamer als bei starker Kopplung, so dass eine größere Anzahl von Iterationsschritten bei der tomographischen Rekonstruktion durchzuführen ist.



## 6. Messtechnik für akustische Laufzeittomographie

Für die Berechnung der Verteilungen von Temperatur und Strömung in einem Untersuchungsgebiet werden Messungen der Schalllaufzeiten auf unterschiedlichen Ausbreitungswegen benötigt. Eine wesentliche Anforderung an das Messsystem zur akustischen Laufzeittomographie ist daher, dass eine gleichzeitige Messung mit mehreren Sende- und Empfangskanälen realisiert werden kann.

Das Messsystem zur akustischen Laufzeittomographie besteht im Wesentlichen aus der akustischen Messhardware, welche sich aus einer akustischen Messkarte, den Signalgebern (Lautsprecher) und Empfängern (Mikrophone) zusammensetzt. Die Steuerung der Hardwarekomponenten, die Generierung der Signale, die Datenaufzeichnung, die Berechnung der Schalllaufzeiten und die anschließende Rekonstruktion der Verteilungen von Strömung und Temperatur werden durch eine Software realisiert, welche in der Programmierumgebung von MATLAB der Firma The Mathworks<sup>2</sup> entwickelt wurde.

Für Demonstrationen tomographischer Techniken sowie zur Entwicklung und zum Testen neuer Komponenten, Methoden und Algorithmen wurde ein Tomographiemodell entwickelt (Abbildung 38, vgl. Barth et al., 2004; Holstein et al., 2004). Dieses ermöglicht tomographische Messungen auf einer Messfläche mit einer Ausdehnung von 1,23 m × 1,23 m und wird durch eine Rahmenkonstruktion aus Aluminiumprofilen begrenzt. Die Lautsprecher und Mikrophone sind durch Adapter mit den Profilen verbunden, wodurch eine hohe Flexibilität bei der Anordnung der Schallsender und Empfänger ermöglicht wird. Dies wiederum lässt Analysen bezüglich verschiedener Strahlüberdeckungen des Untersuchungsgebietes zu.

Die Anwendung der Komponenten, welche für Messungen mit dem Modelltomographen eingesetzt werden, ist jedoch nicht auf die Verwendung innerhalb der Laborvariante des Tomographen beschränkt. Hinsichtlich der Anwendbarkeit der Hardware für akustisch tomographische Messungen sind verschiedene Anforderungen geknüpft, welche primär mit den Grundlagen akustisch tomographischer Messungen in Zusammenhang stehen und nur sekundär an die Größe der Modellfläche gebunden sind. Eine Voraussetzung, um Informationen über die gesamte Messfläche zu erhalten, ist eine möglichst homogene Überdeckung des Gebietes mit Schallstrahlen. Hierfür müssen Messungen entlang verschiedener Schallausbreitungsstrecken existieren, welche durch die Anordnung von einer Vielzahl von Schallsendern und Empfängern um das Messgebiet und im Messgebiet selbst erzeugt werden. Es muss dabei sichergestellt sein, dass das Senden und Empfangen synchron, d. h. mit derselben zeitlichen Basis, erfolgt, um eine genaue Laufzeitberechnung aus den verschiedenen Zeitsignalen (Ausgänge und Eingänge) gewährleisten zu können. Des Weiteren

---

<sup>2</sup> The MathWorks, Inc., 3 Apple Hill Drive, Natick, MA 01760-2098, United States.

müssen die Schallsender bzw. Empfänger so konzipiert sein, dass eine Abstrahlung bzw. ein Empfang der akustischen Signale aus verschiedenen Raumrichtungen sichergestellt wird.

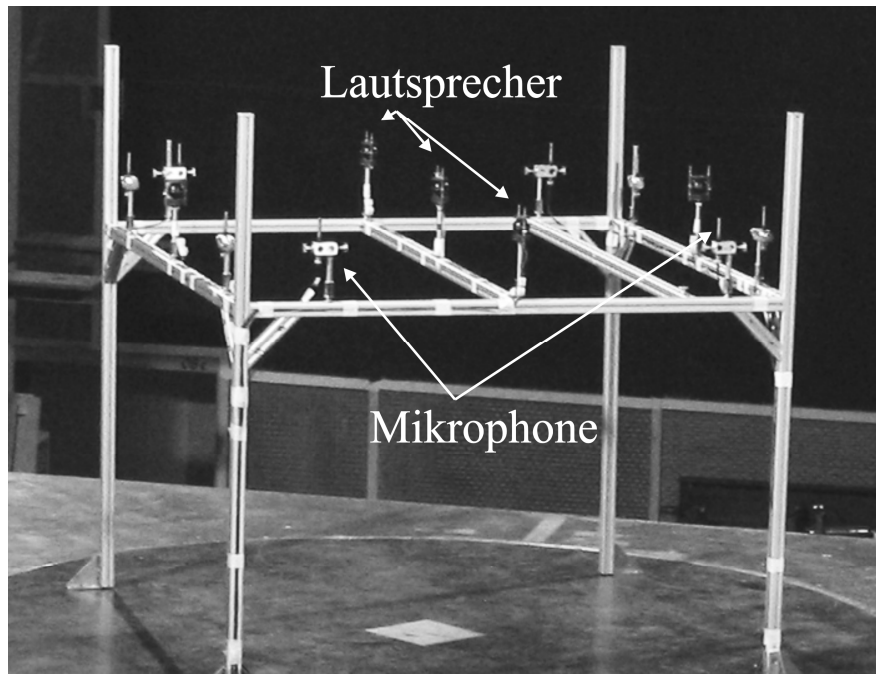


Abbildung 38: Modelltomograph zur Demonstration tomographischer Verfahren sowie zum Testen neuer Komponenten, Methoden und Algorithmen.

Eine Beschreibung der wesentlichen Hardwarekomponenten erfolgt in den nächsten Abschnitten. Hierbei wird der Schwerpunkt auf die Beschreibung der Komponenten gelegt, welche bei Messungen eingesetzt wurden, bei denen das Untersuchungsgebiet eine Ausdehnung von bis zu einigen Metern Kantenlänge aufwies. Im Anschluss daran wird die Software betrachtet, welche zur Durchführung der akustischen Laufzeittomographie entwickelt wurde.

## 6.1. Hardware

Die Hardware für die akustische Laufzeittomographie unterteilt sich im Wesentlichen in drei Komponenten, welche in Abbildung 39 schematisch dargestellt sind: Ein Computer mit der akustischen Messkarte, die Schallsender und die Schallempfänger.

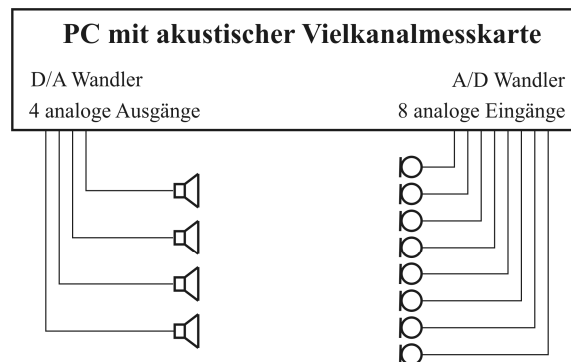


Abbildung 39: Schematische Darstellung der Hardwarekomponenten des akustisch tomographischen Systems. Die Generierung der Signale erfolgt am PC, deren Aussendung nach der Digital-Analog-Wandlung (D/A Wandler) durch Schallsender. Mikrophone detektieren die Signale, welche nach der Analog-Digital-Wandlung (A/D Wandler) zur Analyse und Weiterverarbeitung am PC zur Verfügung stehen.

### 6.1.1. Akustische Messkarte

Die akustische Messkarte dient der Wandlung von digital erzeugten Signalen in analoge Signale, welche mit entsprechenden Signalgebern ausgesendet werden. Weiterhin erfolgt eine Wandlung analog empfangener Signale in digitale Signale zur Weiterverarbeitung am PC. Zur Anwendung bei der akustischen Laufzeit tomographie muss die akustische Messkarte über möglichst viele Kanäle zum Senden und Empfangen verfügen, um gleichzeitig Laufzeitmessungen entlang verschiedener Schallstrecken durchzuführen. Weiterhin müssen die Sende- und Empfangskanäle über eine gemeinsame zeitliche Basis miteinander verbunden sein, damit präzise Messungen der Schalllaufzeit akustischer Signale durch Korrelation des Sende- und Empfangssignals (vgl. Kapitel 3) durchgeführt werden können. Die Genauigkeit bei der Berechnung der Schalllaufzeit wird dabei maßgeblich durch die Abtastung der analogen Signale und deren Digitalisierung (Abtastfrequenz der Messkarte) beeinflusst.

Diesen Anforderungen gerecht wurde eine Vielkanalmesskarte der Gerätefamilie HARMONIE der Firma SINUS Messtechnik GmbH<sup>3</sup>. Für den Einsatz zur akustischen Laufzeit tomographie wurde auf eine PCI Steckkarte zurückgegriffen. Sie verfügt über vier Aus- und acht Eingangskanäle, welche zeitlich miteinander synchronisiert sind. Die maximale Abtastrate der Messkarte  $f_{\text{dig}}$  beträgt 51,2 kHz, woraus sich eine zeitliche Auflösung von etwa 20  $\mu\text{s}$  ergibt. Für diese Abtastrate beträgt die Nyquistfrequenz (vgl. Kapitel 3.2), die obere Grenzfrequenz zur Abtastung akustischer Signale,  $f_N = 26,1$  kHz. Um Aliasingeffekte zu vermeiden, verfügt die akustische Messkarte über einen Anti-Aliasing-Filter, welcher eine Tiefpassfilterung der Signale bei einer Frequenz von 22,4 kHz bewirkt. Weitere gerätespezifische Parameter laut Hersteller sind in Tabelle 5 zusammengefasst.

<sup>3</sup> SINUS Messtechnik GmbH, Föppelstraße 13, 04347 Leipzig, Germany.

Tabelle 5: Gerätespezifische Parameter der akustischen Vielkanalmesskarte Harmonie-octav PCI (Herstellangaben SINUS Messtechnik GmbH<sup>3</sup>).

Eingangskanäle (Messkanäle)	8
Ausgangskanäle	4
Sensorstromversorgung	ICP 2 mA
ADC-Auflösung	16 Bit
Abtastrate	48,0 kHz 51,2 kHz
THD und Noise	> 76 dB

Die Messkarte besitzt einen konstanten zeitlichen Versatz zwischen dem Aussenden und dem Empfangen akustischer Signale. Um diesen zu bestimmen, werden die verfügbaren Kanalpaare nacheinander rückgekoppelt, d.h. die Ausgänge der Messkarte werden nacheinander direkt mit den Eingängen verbunden. Die Berechnung des Versatzes kann durch Korrelation des gesendeten und des empfangenen Signals aus der Lage des Korrelationsmaximums gewonnen werden. Bei der Bestimmung der Laufzeiten akustischer Signale in Luft ist dieser konstante Versatz für das entsprechende Kanalpaar von den gemessenen Laufzeiten zu subtrahieren, um die tatsächliche Schalllaufzeit des Signals zwischen Sender und Empfänger zu ermitteln.

### 6.1.2. Lautsprecher

Die Erzeugung von Schall erfolgt durch mechanisch schwingende Elemente, wobei die Schwingungsenergie in Form von Druckschwankungen an die Luft abgegeben wird. Zum Aussenden akustischer Signale für tomographische Anwendungen wurden im Rahmen eines Kooperationsprojektes mit der SINUS Messtechnik GmbH spezielle Lautsprecherkonstruktionen entwickelt, welche an die Erfordernisse akustisch tomographischer Messungen angepasst wurden. Hauptanforderung an die Lautsprecher war dabei, die akustischen Signale homogen über einen möglichst großen Winkelbereich abzustrahlen. Auf diese Weise kann die gleichmäßige Überdeckung eines Gebietes erfolgen, wodurch der Schall einer Quelle gleichzeitig aus unterschiedlichen Richtungen (Raumwinkeln) von Mikrofonen detektiert werden kann.

Als Schallgeber wurden Mikro-Lautsprecher vom Typ KDM-15008-5 der Firma Kingstate<sup>4</sup> eingesetzt. Die Kenndaten der Lautsprecher sind Tabelle 6 zu entnehmen.

Die Abstrahlrichtung akustischer Signale in Abhängigkeit von deren Frequenz durch einen Lautsprecher ist von der Membrangröße des Wandler abhängig. Hierbei gilt, dass eine kugelförmige Abstrahlung der Schallenergie erreicht wird, wenn der Membrandurchmesser

<sup>4</sup> Kingstate Electronics Corp., Taiwan; Bezug der Lautsprecher über: Deltron Components GmbH (jetzt Abacus Deltron GmbH), Ammerseestraße 59a, 82061 Neuried, Germany.



$d_M$  deutlich kleiner ist als die Wellenlänge  $\lambda$  des akustischen Signals (Steinke und Hoeg, 1984)

$$d_M \ll \lambda. \quad (6.1)$$

Bei den verwendeten Lautsprechern beträgt der Membrandurchmesser 14,8 mm. Um den Frequenzbereich abzuschätzen, in welchem eine solche Membran die Schallenergie nahezu ungerichtet abstrahlt, wird eine Wellenlänge mit doppeltem Membrandurchmesser betrachtet. Nach Gleichung (2.14) kann die Frequenz aus der Wellenlänge  $\lambda = 0,0296$  m und der Schallgeschwindigkeit  $c = 330$  m s<sup>-1</sup> berechnet werden. Es ergibt sich dabei ein Wert von etwa 11 kHz.

Tabelle 6: Kenngrößen der Mikro-Lautsprecher vom Typ KDM-15008-5 der Firma Kingstate (Herstellerangaben).

Nennlast	0,5 W
Maximallast	0,7 W
Impedanz	8 $\Omega \pm 15\%$
Nennfrequenz ( $f_0$ )	750 Hz $\pm 20\%$
Übertragungsbereich	$f_0$ bis 20 kHz
Schalldruck	89 $\pm 3$ dB
Betriebstemperatur	-20 bis +55°C
Durchmesser	14,8 mm

Um eine homogene Richtwirkung der Schallaussendung für alle Frequenzen im Übertragungsbereich der Lautsprecher bis 20 kHz zu erreichen, wurden jeweils zwei der Mikro-Lautsprecher in einem Lautsprecherturm kombiniert. Die Lautsprecher wurden dabei oberhalb und unterhalb eines kugelförmigen Reflexionskörpers angebracht (vgl. Abbildung 40) und gleichphasig angesteuert.

Um die Eigenschaften der Lautsprecherkonstruktionen hinsichtlich der Richtcharakteristik und des Frequenzganges zu überprüfen, wurden Messungen im großen reflexionsarmen Raum am Institut für Akustik und Sprachkommunikation der Technischen Universität Dresden durchgeführt (Starke, 2004). Ein solcher Raum zeichnet sich dadurch aus, dass sich abgestrahlte akustische Signale reflexionsfrei ausbreiten und somit ein freies Schallfeld ohne Begrenzungsflächen simuliert wird (Veit, 1988).

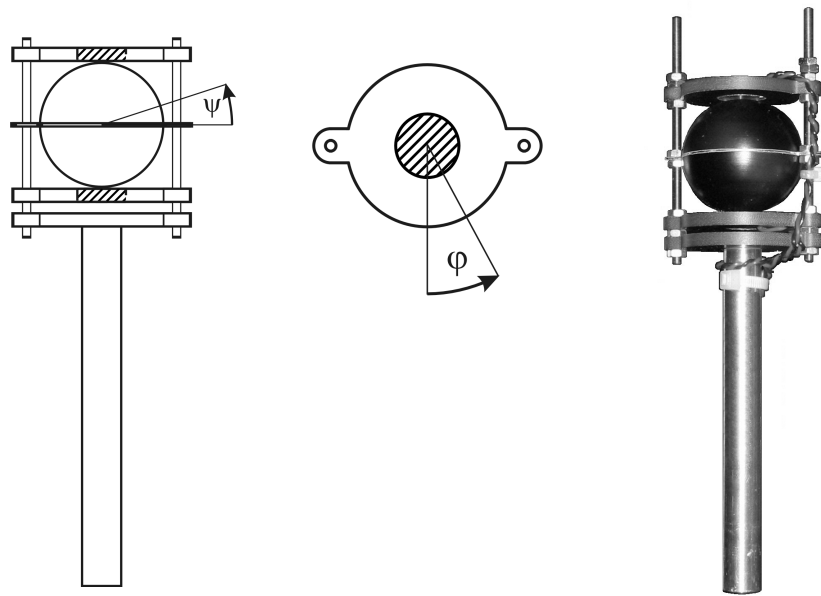


Abbildung 40: Lautsprecherkonstruktionen zur akustischen Tomographie. Schematische Darstellung in der Seitenansicht (links) und Draufsicht (Mitte). Auf der rechten Seite ist ein Lautsprecherturm abgebildet, wie er für akustische Laufzeitmessungen eingesetzt wird. In jedem Lautsprecherturm sind zwei Minilautsprecher eingebaut (schraffierte Flächen; links, Mitte), welche den Schall in entgegengesetzte Richtungen aussenden. Die Schallwellen werden bei ihrer Ausbreitung vom Reflexionskörper (Kugel) umgelenkt, wodurch eine Abstrahlung der akustischen Signale horizontal in alle Richtungen erreicht wird.

Bei den Messungen wurde jeweils ein Lautsprecher dreh- und schwenkbar in einem festen Abstand von 1,1 m zu einem Messmikrofon positioniert. Um die Richtcharakteristik zu bestimmen, wurden die frequenzabhängigen Pegelwerte (Frequenzgänge) aus verschiedenen Richtungen aufgezeichnet. Hierzu wurde das Messsystem MLSSA (Maximum Length Sequence System Analyser) der Firma DRA Laboratories eingesetzt, das die Messung des Übertragungsverhaltens eines akustischen Systems unter Verwendung einer pseudostochastischen Anregung (vgl. Kapitel 3.3.3) ermöglicht. Das Übertragungsverhalten, welches auch als Impulsantwort des Systems bezeichnet wird, kennzeichnet das Übertragungssystem, das sich aus der akustischen Messtechnik (Wandler, Verstärker, Lautsprecher, Mikrofon) sowie der Übertragungsstrecke zusammensetzt (Abbildung 41), vollständig (Fliege, 1991).

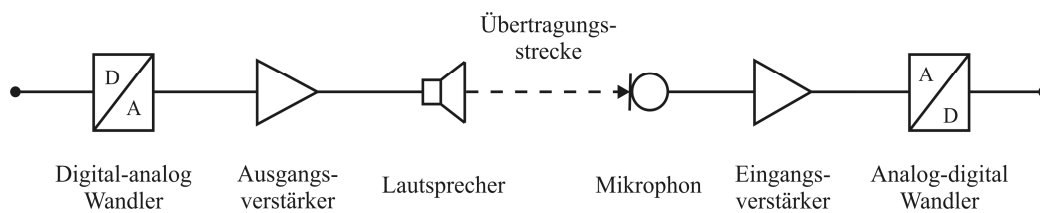


Abbildung 41: Schematische Darstellung des Übertragungssystems.

Mittels Fouriertransformation lässt sich nach Gleichung (3.10) aus der Impulsantwort der Frequenzgang des Übertragungssystems berechnen (Fliege, 1991). Um die Abstrahlcharakteristik der Lautsprechertürme in Abhängigkeit vom Raumwinkel und damit die Richtcharakteristik zu ermitteln, wurde zunächst der Frequenzgang des Übertragungssystems in Hauptabstrahlrichtung (Azimutwinkel  $\varphi_0 = 0^\circ$ , Polarwinkel  $\psi_0 = 0^\circ$ ; vgl. Abbildung 40) bestimmt. Hierfür wurden 20 Einzelmessungen arithmetisch gemittelt, welche mit folgenden Messparametern gewonnen wurden:

Anregungssignal: MLS vom Grad 14 (16383 Werte; 139,3 ms Signallänge),  
 Länge der Zeitdaten: 32768 Werte, 278,5 ms,  
 Tiefpassfilter (Anti-Aliasing-Filter): Chebyshev-Filter, Grenzfrequenz: 40 kHz,  
 FFT: 4096 Punkte; Frequenzauflösung: 28,72 Hz und  
 Zeitfensterung der Impulsantwort: 3 ms ... 13 ms (Rechteckfenster).

Im Anschluss an die Messung in Hauptabstrahlrichtung wurde zunächst die horizontale Richtungsabhängigkeit untersucht. Hierfür wurde der Azimutwinkel  $\varphi$  schrittweise um  $15^\circ$  erhöht, während der Polarwinkel  $\psi$  konstant gehalten wurde. Die Angabe der Richtungsabhängigkeit der Schallaussendung bezüglich einer Messung in Hauptabstrahlrichtung erfolgt durch das Richtungsmaß  $D$  (Veit, 1988)

$$D = 20 \log \left( \left| \frac{p'(\varphi, \psi)}{p'(\varphi_0, \psi_0)} \right| \right) = L_p(\varphi, \psi) - L_p(\varphi_0, \psi_0). \quad (6.2)$$

Hierbei beschreibt  $p'$  den Schalldruck in Abhängigkeit von der Raumrichtung bei konstantem Abstand zwischen Schallsender und Empfänger und  $L_p$  den Schalldruckpegel nach Gleichung (2.42). Abbildung 42 zeigt das Richtungsmaß für einen Lautsprecherturm, welches für verschiedene Azimutwinkel in einem Frequenzbereich von 750 Hz bis 20 kHz aus den gemessenen Frequenzgängen berechnet wurde. Eine Pegeldifferenz von 0 dB entspricht dabei dem frequenzabhängigen Schalldruck auf der Bezugsachse. Im Frequenzbereich von ca. 2 kHz bis etwa 10 kHz zeigt der Lautsprecherturm ein sehr homogenes Abstrahlverhalten. In diesem Bereich variieren die Pegelwerte nur um  $\pm 4$  dB. Ab einer Frequenz von 10 kHz treten etwas höhere Abweichungen auf, die eine Pegeldifferenz von  $\pm 10$  dB im Übertragungsbereich der Lautsprecher (bis 20 kHz) jedoch nicht überschreiten. In einem Frequenzbereich ab ca. 2 kHz kann die horizontale Schallabstrahlung des Lautsprecherturmes daher als nahezu homogen betrachtet werden und ist somit für die Anwendung im Rahmen tomographischer Messungen geeignet.

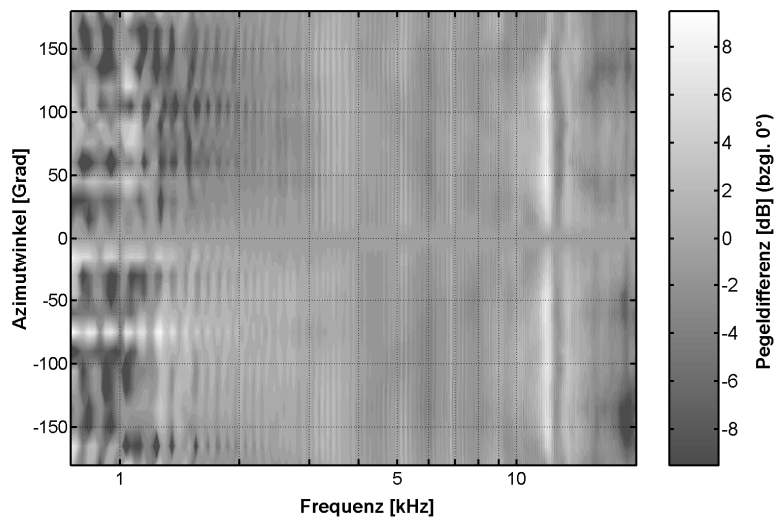


Abbildung 42: Richtungsmaß für verschiedene Frequenzen und Raumwinkel in der horizontalen Ebene für einen Lautsprecherturm (nach Starke, 2004).

Um auch die vertikale Abhängigkeit der Abstrahlcharakteristik zu untersuchen, wurde in einer weiteren Messreihe der Polarwinkel  $\psi$  systematisch um jeweils  $15^\circ$  variiert. Der Abstand zwischen Sender und Empfänger sowie der Azimutwinkel  $\varphi$  wurden konstant gehalten. Das Dämpfungsmaß für diese Messung ist in Abbildung 43 dargestellt. Betrachtet man den Frequenzbereich ab 2 kHz für diese Untersuchung, fallen deutliche Inhomogenitäten auf, welche sowohl zwischen 2 kHz und 3 kHz auftreten als auch den Frequenzgang oberhalb von 4 kHz charakterisieren. Die absoluten Differenzpegel liegen in vielen Winkel- und Frequenzbereichen bei -10 dB bis -20 dB und fallen zum Teil auf -50 dB ab. Lediglich ein sehr schmaler Bereich um die horizontale Ausrichtung ( $\psi = 0^\circ$ ,  $\psi = \pm 180^\circ$ ) zeigt ein ähnliches Verhalten des frequenzabhängigen Schalldruckverlaufs, wie der Bezugsschalldruck in der horizontalen Ebene selbst.

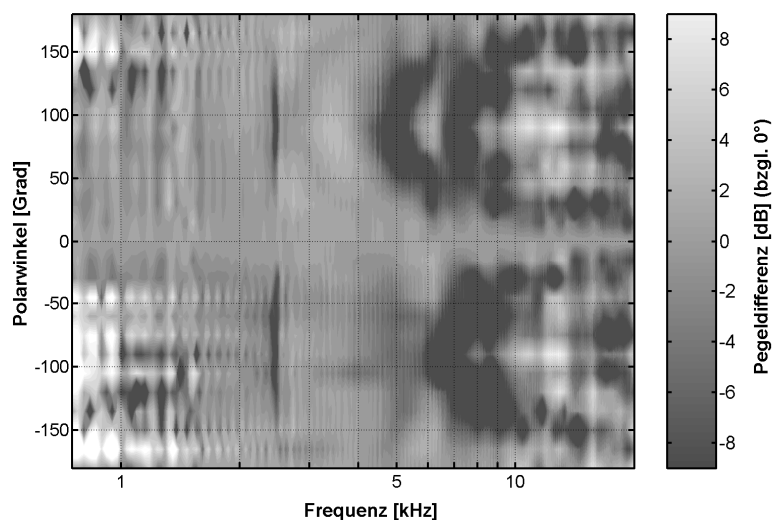


Abbildung 43: Richtungsmaß für verschiedene Frequenzen und Raumwinkel in der vertikalen Ebene für einen Lautsprecherturm (nach Starke, 2004).

Die Inhomogenitäten, welche die vertikale Abhängigkeit der Schallabstrahlung charakterisieren, sind im Wesentlichen auf die Anordnung der Lautsprecher zurückzuführen. Diese senden zeitsynchron und gleichphasig ein Schallsignal aus, wobei sich die Schallfelder der einzelnen Lautsprecher bei deren Ausbreitung überlagern. Eine solche Anordnung zweier Einzelschallquellen wird als akustischer Dipol bezeichnet, dessen akustisches Feld durch Überlagerung der Felder von zwei Punktschallquellen beschrieben werden kann (Pierce, 1994). Die Simulation eines akustischen Dipols und der resultierenden vertikalen Richtcharakteristik ist in Anhang C beschrieben.

Intensive Untersuchungen zu den Eigenschaften der Lautsprechertürme und deren Anwendbarkeit bei der akustischen Laufzeit tomographie wurden im Rahmen einer Magisterarbeit (Domke, 2005) durchgeführt. In dieser Arbeit wurde eine Lautsprecheranordnung vorgeschlagen, welche als geeignet beschrieben wird, um für tomographische Anwendungen eingesetzt zu werden. Hierfür wurde jeweils ein Mikro-Lautsprecher vom Typ KDM-15008-05 verwendet und derart in ein Testgehäuse montiert, dass eine nahezu halbkugelförmige Schallabstrahlung gewährleistet werden konnte. Untersuchungen der Richtcharakteristik einer solchen Anordnung zeigen, dass Pegelabweichungen für Abstrahlwinkel bei ca.  $80^\circ$  lediglich deutlich oberhalb von 10 kHz bezüglich der direkten Abstrahlrichtung auftreten und bei 20 kHz eine maximale Dämpfung von 8 dB erreichen. Als Vorteil wird genannt, dass durch die halbkugelförmige Abstrahlung bei Installation der Sender am Messfeldrand unerwünschte Schallabstrahlung aus dem Messfeld heraus vermieden wird. Auf diese Weise werden Störeinflüsse bei der Korrelationsanalyse verringert, welche z. B. durch Reflexion an Hindernissen (Wände) entstehen, die sich hinter dem Schallsender befinden.

Nachteil einer solchen Konstruktion ist jedoch, dass durch die mechanischen Eigenschaften die Richtung der Abstrahlung begrenzt und somit die Anwendung der Lautsprecher auf bestimmte Bereiche (am Rand) des Tomographiegitters beschränkt ist. Es muss daher im konkreten Anwendungsfall entschieden werden, welche Lautsprecherkonstruktionen zum Einsatz kommen soll. Für Untersuchungen, welche im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurden, fanden ausschließlich die Lautsprechertürme (Abbildung 40) Anwendung.

### 6.1.3. Mikrophone

Zur Aufzeichnung der akustischen Signale für die Laufzeitbestimmung werden  $\frac{1}{4}$  Zoll Kondensatormessmikrophone vom Typ MI-17 der Firma AVM<sup>5</sup> eingesetzt (Abbildung 44). Ihre technischen Daten sind in Tabelle 7 zusammengefasst. Bei diesen Sensoren handelt es sich um Druckempfänger, d. h. es erfolgt die Detektion von Druckschwankungen, welche durch einen Schalldruck hervorgerufen werden und deren Umwandlung in mechanische Schwingungen einer Membran (Veit, 1988). Um ein Messsignal zu erhalten, wird in

---

<sup>5</sup> AVM – Bertram Schapal, Forststraße 32, 64572 Büttelborn, Germany.

einem weiteren Schritt durch die im Mikrofon bereits integrierte Elektronik die mechanische Energie in elektrische Energie umgewandelt und an die Messkarte übertragen.



Abbildung 44: Kondensatormessmikrofon (1/4 Zoll) vom Typ "MI 17" der Firma AVM.

Bei einem Druckempfänger ist die schwingende Membran vor einem geschlossenen Hohlraum angebracht, so dass einfallender Schall richtungsunabhängig detektiert wird. Eine Kapillaröffnung in der hinteren Begrenzungswand dient dem statischen Druckausgleich, kann jedoch die raschen Druckschwankungen, welche durch den Schall hervorgerufen werden, nicht ausgleichen. Druckempfänger zeichnen sich folglich dadurch aus, dass der Empfang akustischer Signale im Allgemeinen richtungsunabhängig erfolgt, die Richtcharakteristik also derjenigen einer Kugel entspricht (Görne, 1996). Dies setzt jedoch voraus, dass die Frequenz des empfangenen Signals nicht zu hoch ist (Borucki, 1989).

Tabelle 7: Eigenschaften der Mikrophone vom Typ MI-17 der Firma AVM.

Frequenzbereich	20 Hz ... 4 kHz ( $\pm 0,5$ dB) 4 kHz ... 20 kHz ( $\pm 1,5$ dB)
Temperaturbereich	-10 ... + 50°C
Empfindlichkeit	ca. 50 mV Pa <sup>-1</sup>
Signal-Rausch-Abstand	30 dB lin (20 Hz ... 20 kHz)
Max. Schalldruckpegel	130 dB

Analog zu den Betrachtungen der Richtcharakteristik bei Schallsendern in Abhängigkeit von der Frequenz, ist auch die Richtwirkung von Mikrofonen abhängig vom Verhältnis zwischen Membrangröße und Frequenz bzw. Wellenlänge des Signals. Liegt die Wellenlänge  $\lambda$  der einfallenden Schallwellen im Bereich des Membrandurchmessers oder darunter, verursachen Reflexionen der einfallenden Schallwellen einen Druckstau an der Membran, wodurch sich Abweichungen der Richtcharakteristik von der einer Kugel ergeben (Steinke und Hoeg, 1984). Bei den verwendeten Schallempfängern vom Typ MI-17 beträgt der Membrandurchmesser 1/4 Zoll (6,35 mm). Ein Signal, dessen Wellenlänge  $\lambda$  dem Membrandurchmesser entspricht, kann für eine Schallgeschwindigkeit von  $c = 330 \text{ m s}^{-1}$  nach Gleichung (2.14) berechnet werden. Die entsprechende Frequenz beträgt etwa 52 kHz und liegt damit deutlich über dem Frequenzbereich, in welchem das Mikrofon arbeitet und welcher für die akustisch tomographischen Messungen genutzt wird.

Eine Eigenart der Bauweise von Druckempfängern ist der Druckstauereffekt, welcher sich für alle Frequenzen bei annähernd senkrechter Beschallung der Membran auswirkt. In diesem Bereich findet eine Pegelerhöhung statt, welche auf ein Maximum des Druckstaus bei senkrechtem Schalleinfall zurückzuführen ist. Bei schrägem Einfall nimmt der Einfluss ab, bis er bei parallelem Einfall schließlich nicht mehr vorhanden ist (Görne, 1996). Für tomographische Anwendungen werden die Mikrophone daher senkrecht zur Messfläche installiert, so dass der Schall parallel zur Lage der Membran auf das Mikrophon trifft.

## 6.2. Software

Zur Durchführung der akustisch tomographischen Messungen wurde ein Softwarepaket entwickelt, mit welchem der gesamte Messprozess gesteuert werden kann. Hierzu zählen die Ansteuerung der Hardware, die Aufzeichnung der Schallsignale, die Laufzeitbestimmung sowie die anschließende tomographische Rekonstruktion der Verteilungen von Wind und Temperatur. Bei der Programmierung wurde Wert auf eine hohe Flexibilität bei der Messabfolge gelegt, um den Messablauf leicht an die aktuelle Problemstellung anpassen zu können. Hierfür stehen verschiedene Messmodi zur Verfügung, wobei einzelne Module des akustischen Systems aktiviert oder deaktiviert werden. Liegt der Schwerpunkt der Messung im Wesentlichen auf einer möglichst raschen Abfolge von Einzelmessungen, werden die akustischen Signale lediglich gesendet und für eine spätere Analyse aufgezeichnet. Sollen hingegen tomographische Techniken demonstriert werden, besteht die Möglichkeit der Echtzeit-Datenauswertung und Darstellung der Verteilungen für jede Einzelmessung noch während des Messprozesses. Die softwaretechnische Realisierung eines solchen Messablaufs ist in Abbildung 45 dargestellt.

Grundsätzlich lässt sich der Messprozess in folgende Abschnitte unterteilen:

- Initialisierung,
- Messung und Berechnung und
- Abschluss der Messung.

Die Initialisierungsphase dient der Einstellung wichtiger Mess- und Auswerteparameter. Hierzu zählen Hardwareeinstellungen, wie die Angabe genutzter Kanäle und deren Eigenschaften sowie die Konfiguration des Messablaufs. Verschiedene Parameter ermöglichen die Wahl des Sendesignals, die Angabe der zeitlichen Abfolge von Einzelmessungen und der Sendefolge (gleichzeitiges oder versetztes Senden) und die Angabe der Positionen der Schallsender und Empfänger. Soll die Auswertung der Messdaten während der Messung stattfinden, werden in dieser Phase ebenfalls tomographische Parameter vorgegeben.

Nach der Initialisierung erfolgt die eigentliche Messung. Hierfür werden die gewählten Signale in der eingestellten Betriebsart ausgesendet und von den Mikrophenen empfangen und aufgezeichnet. Die folgende Analyse der Daten beginnt mit der Bestimmung der Schalllaufzeit durch Berechnung der Kreuzkorrelationsfunktion und der Suche nach der Lage des Maximums für jedes Sender-Empfänger-Paar (s. Kapitel 3, nähere Erläuterung der softwaretechnischen Implementierung in Kapitel 6.2.2). Im Anschluss erfolgt die

Trennung der Einflussgrößen Temperatur und Strömung (Kapitel 5.1.1), um danach die Verteilungen der skalaren Temperaturwerte und der vektoriellen Strömungsinformationen tomographisch zu berechnen und darzustellen (Kapitel 5.1.2 bzw. 5.1.3).

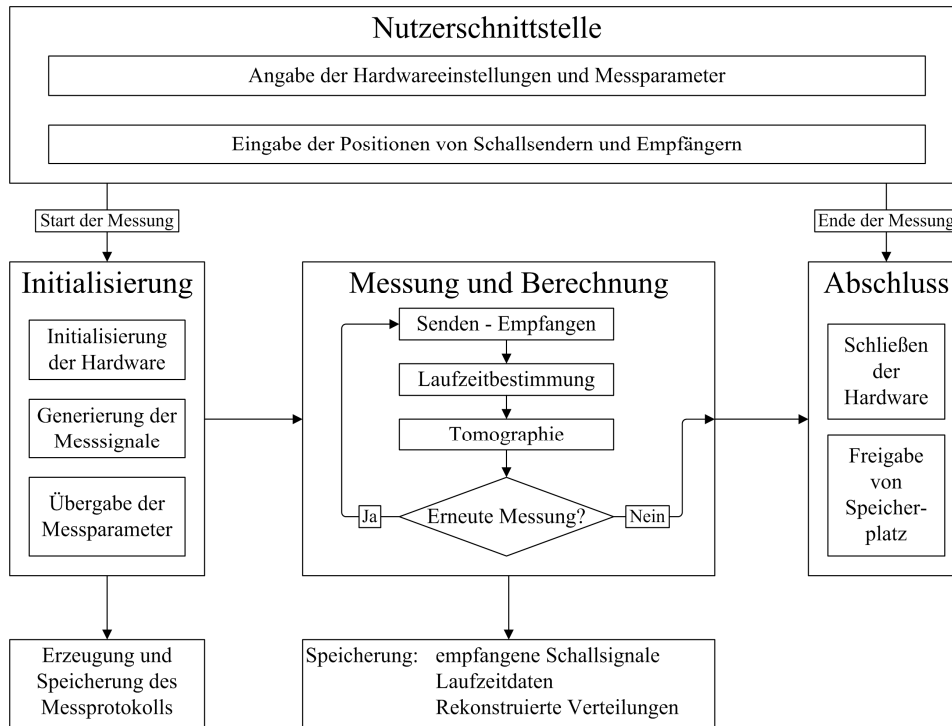


Abbildung 45: Überblick über die Softwarestruktur für akustisch tomographische Messungen.

Die Einzelmessungen erfolgen diskret, d. h. jeder Schallsender sendet ein definiertes Signal aus, welches an den Empfängern detektiert wird. Im Gegensatz dazu wäre eine kontinuierliche Aussendung der Schallsignale denkbar, wobei sichergestellt sein muss, dass ein gemeinsamer zeitlicher Bezug zwischen Senden und Empfangen gegeben ist. Dies könnte zum Beispiel dadurch gewährleistet werden, dass ein Empfangskanal zur zeitlichen Triggerrung eingesetzt wird. Ein solches Vorgehen würde jedoch die ohnehin begrenzte Zahl an Empfangskanälen weiter einschränken und wurde daher für die gegenwärtige Hardwarekonfiguration nicht weiter verfolgt. Die zeitliche Abfolge der Einzelmessungen erfolgt nach den vorgegebenen Messintervallen. Der Messzyklus wird beendet, wenn eine bestimmte Anzahl von Einzelmessungen durchgeführt wurde bzw. durch den Nutzer beendet wird.

In der anschließenden Schlussphase wird die Hardware heruntergefahren, genutzter Speicherplatz freigegeben und alle Dateien geschlossen.

### 6.2.1. Schallsignale

In Kapitel 3.3 wurden bereits Anforderungen an akustische Signale beschrieben, welche für akustisch tomographische Anwendungen eingesetzt werden können. Dieses Verfahren



beruht auf der Detektion der Lage des Maximums der Kreuzkorrelationsfunktion zwischen gesendetem und empfangenem Schallsignal. Wesentliche Voraussetzungen an die Signaleigenschaften war daher eine möglichst impulsförmige Autokorrelationsfunktion und Störunanfälligkeit. Signalarten, welche diesen Eigenschaften am besten entsprechen, sind Chirpsignale (vgl. Kapitel 3.3.2) und pseudostochastische Rauschfolgen mit maximaler Periodenlänge (Maximallängenfolgen, MLS, vgl. Kapitel 3.3.3).

Die Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit basieren auf Messungen mit Maximallängenfolgen. Diese bieten den Vorteil, dass ein gleichzeitiges Messen mit verschiedenen Signalen gleicher Länge möglich und eine Unterscheidbarkeit der Signale und deren Zuordnung zu einem Schallsender gewährleistet ist. Hierdurch bleibt eine hohe Flexibilität bei der Wahl der Geometrie für die Anordnung der Sender und Empfänger gegeben.

Die Grundlagen für die Erzeugung von MLS wurden bereits in Kapitel 3.3.3 dargestellt. Hierbei dienen sogenannte primitive Polynome als Basis für die Generierung der MLS. Für verschiedene Grade von Maximallängenfolgen wurden daher primitive Polynome gespeichert. Die Berechnung der MLS erfolgt nun basierend auf diesen Polynomen. Im Rahmen der akustischen Laufzeit tomographie hat der Nutzer die Möglichkeit, den Grad der gewünschten MLS anzugeben. Entsprechend der Anzahl der Ausgangskanäle werden im Anschluss automatisch aus einer entsprechenden Anzahl primitiver Polynome verschiedene Folgen dieses Grades erzeugt, welche an die Messhardware übergeben werden.

Bei der praktischen Nutzung dieser Signale für akustische Anwendungen ergeben sich jedoch Unterschiede zu den theoretisch generierten Folgen. Zur Realisierung der Flankensteilheit der theoretischen Signale, bei welchen die Amplitude nahezu sprunghaft von +1 auf -1 abfällt bzw. in umgekehrter Richtung ansteigt, ist eine unendlich hohe Bandbreite des Übertragungssystems nötig. Dies ist jedoch bei praktischen Anwendungen nicht gegeben, so dass sich die real gesendeten Folgen durch endliche Anstiegsgeschwindigkeiten und einen stetigen Verlauf der Zeitfunktion von den generierten Signalen unterscheiden. Die Bandbegrenzung wird dabei durch die Komponenten des Messsystems verursacht. Hierzu zählen die akustische Vielkanalmesskarte sowie Schallsender und Empfänger. Die akustische Messkarte tastet die analogen Signale mit einer Frequenz von 51,2 kHz ab, woraus sich eine obere Bandbegrenzung des Signals entsprechend der Nyquistfrequenz von 25,6 kHz ergibt. Die Lautsprecher haben laut Hersteller eine Bandbreite von 750 Hz bis 20 kHz, wodurch der Übertragungsbereich weiter eingeschränkt wird.

Zur Simulation des Effekts der Bandbegrenzung auf Maximallängenfolgen wurde für eine Bandbreite, welche derjenigen der Lautsprecher laut Herstellerangaben entspricht, eine MLS vom Grad 5 (vgl. Kap. 3.3.3, Abbildung 15) digital gefiltert (Butterworth Filter 1. Ordnung mit den Bandpassgrenzen 750 Hz und 20 kHz). Das Ergebnis der originalen sowie der gefilterten Folge ist in Abbildung 46 dargestellt.

Die Untersuchung zeigt zwei Effekte. Zum einen bewirkt die Filterung eine Änderung der Amplitudenwerte an den Stützstellen, welche zum Teil deutlich außerhalb des theoretisch erzeugten Intervalls von  $\pm 1$  liegen. Zum anderen bewirkt die Interpolation von Zwischenwerten, wie sie in vergleichbarer Weise auch vom Digital-Analog-Wandler durchge-

führt wird, eine weitere Amplitudenerhöhung. Bei der Aussendung der MLS ist daher darauf zu achten, dass keine Übersteuerung der Hardware und somit ein Abschneiden der Spitzenwerte, auftritt. Die erzeugten Folgen dürfen daher nicht mit dem für die Hardware maximal möglichen Amplitudenwert gesendet werden.

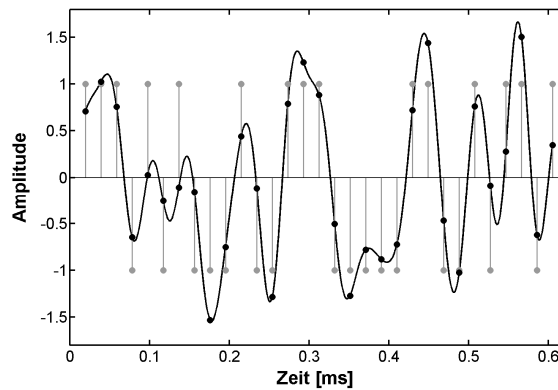


Abbildung 46: Theoretisch erzeugte Maximallängenfolge vom Grad 5 (primitives Polynom:  $x^5 + x^2 + 1$ ) (graue Punkte) sowie deren bandpassgefilterte Repräsentation (schwarze Punkte) mit interpolierten Zwischenwerten (schwarze Linie). Die zeitliche Abhängigkeit (Abszisse) ergibt sich aus der Abtastrate der akustischen Messkarte (51,2 kHz), wobei jeweils ein Zeitschritt einem Wert der Maximallängenfolge zugeordnet wird. Die Realisierung der Bandpassfilterung erfolgte mit einem Butterworth-Filter 1. Ordnung mit den Bandpassgrenzen 750 Hz und 20 kHz.

### 6.2.2. Laufzeitbestimmung

Die Bestimmung der Laufzeit der akustischen Signale erfolgt mittels Kreuzkorrelation zwischen dem gesendeten und dem empfangenen Signal. Die Laufzeit entspricht der Lage des Maximums der Kreuzkorrelationsfunktion (vgl. Kapitel 3). Um eine Verbesserung der zeitlichen Auflösung, welche durch die Abtastrate der akustischen Vielkanalmesskarte vorgegeben ist, zu erhöhen, erfolgt eine Interpolation von Zwischenwerten unter Verwendung der Samplingreihe (Kapitel 3.5, Gleichung (3.45)).

Im vorigen Abschnitt (6.2.1) wurde der Effekt der Bandpassbegrenzung des akustischen Messsystems auf die Maximallängenfolgen beschrieben (vgl. Abbildung 46). Diese Begrenzung wirkt sich ebenfalls auf die Kreuzkorrelationsfunktion (Abbildung 47) aus. Die Lage des Maximums bei Betrachtung der diskreten Werte bleibt erhalten. Betrachtet man jedoch die interpolierten Werte, ist eine Verschiebung um etwa  $5 \mu\text{s}$  festzustellen. Dies entspricht einer Verschiebung um etwa 0,25 Abtastwerte. Da diese Verschiebung jedoch auf das Übertragungsverhalten der Komponenten des akustischen Systems zurückzuführen ist, kann eine Korrektur bei der Analyse der Laufzeitdaten für die einzelnen Sender-Empfänger-Kombinationen erfolgen.

Neben der Verschiebung des Maximums fällt auf, dass die Steilheit der gefilterten KKF in direkter Umgebung des Maximums geringer ausfällt und das Maximum selbst niedriger ist als bei der Autokorrelationsfunktion der originalen Maximallängenfolge. Auch hierfür ist

die Bandpassbegrenzung verantwortlich. Einen ähnlichen Einfluss auf die KKF haben Störgeräusche aus der Umgebung. Um eine sichere Detektion der Lage des KKF-Maximums sicherzustellen, dürfen diese Störungen durch die Umgebung nicht zu groß sein.

Die Verwendung unterschiedlicher Signale (Maximallängenfolgen mit verschiedenen charakteristischen Polynomen) für jeden Sender ermöglicht eine eindeutige Zuordnung der Maxima der KKF zu den einzelnen Schallstrecken (vgl. Abbildung 17). Zur Erhöhung der räumlichen Auflösung wurden jedoch in vielen Fällen jeweils zwei Schallsender mit einem Signal betrieben und somit die Anzahl der verfügbaren Schallstrecken für die Analyse verdoppelt. In diesen Fällen weist die KKF zwei Maxima auf, welche den beiden Schallstrecken der Sender mit gleichem Signal zugeordnet werden müssen. Bei der Anordnung der Sender ist in diesem Fall darauf zu achten, dass die Streckenlängenunterschiede zwischen den Sendern mit gleichem Signal zu jedem Empfänger hinreichend groß sind, um die Maxima eindeutig einer Strecke zuzuordnen (Arnold, 2000).

Für die automatische Erkennung der Laufzeiten ergibt sich in diesem Fall die Schwierigkeit, dass innerhalb einer Funktion zwei Maxima detektiert werden müssen, von denen das mit der höheren Laufzeit (größere Entfernung zwischen Schallsender und Empfänger) häufig eine deutlich geringere Amplitude aufweist, als das Maximum der KKF, welches der kurzen Strecke zuzuordnen ist. Für solche Anwendungen erfolgt eine Fensterung der KKF, wobei für die Suche nach dem Maximum für eine bestimmte Strecke lediglich ein Teil der KKF betrachtet wird. Dieser ergibt sich aus der Streckenlänge selbst sowie (sehr groben) Vorgaben für den Temperaturbereich sowie maximale Strömungsgeschwindigkeiten im Messgebiet.

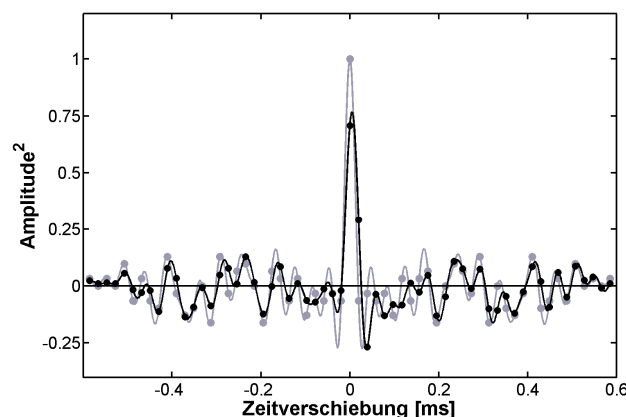


Abbildung 47: Diskrete Autokorrelationsfunktion (Punkte) der MLS vom Grad 5 mit interpolierten Zwischenwerten (grau) sowie Kreuzkorrelationsfunktion zwischen dieser MLS und der im Bereich zwischen 750 Hz und 20 kHz bandpassgefilterten Realisierung (schwarz).

### 6.3. Genauigkeitsgrenzen

In diesem Abschnitt soll die Genauigkeit des Verfahrens zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit aus akustischen Messungen und daraus abgeleitet der Temperatur und Strömung entlang einer Messstrecke abgeschätzt werden. Die Berechnung der effektiven Schallgeschwindigkeit entlang einer Messstrecke erfolgt aus diesen Größen nach Gleichung (5.1). Die Entfernung zwischen Sender und Empfänger wird hierbei geometrisch bestimmt und die Laufzeit durch Kreuzkorrelation des gesendeten mit dem empfangenen Signal ermittelt. Messunsicherheiten in Form von zufälligen Fehlern ergeben sich folglich für beide Messgrößen.

Betrachtet man den Zusammenhang zwischen allen direkt gemessenen Größen  $x_i$  und einer aus ihnen berechneten Größe  $y$  kann der Einfluss der Unsicherheiten der direkt gemessenen Größen  $u(x_i)$  auf die Unsicherheit der daraus abgeleitete Größe  $u(y_i)$  mit Hilfe der Fehlerfortpflanzung nach Gauß abgeschätzt werden (vgl. Geschke et al., 1994). Diese ist gegeben durch

$$u(y) = \sqrt{\sum_i \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} u(x_i) \right)^2}, \quad (6.3)$$

wobei vorausgesetzt wird, dass die Unsicherheiten der Messwerte zufällig verteilt und deutlich kleiner als die Messgröße selbst sind.

Die maximale Unsicherheit bei der Bestimmung der effektiven Schallgeschwindigkeit  $u(c_{\text{eff}})$  lässt sich aus den Unsicherheiten der Laufzeitmessung  $u(\tau_0)$  und der Entfernungsmessung  $u(d)$  berechnen

$$u(c_{\text{eff}}) = \left| \frac{\partial c_{\text{eff}}}{\partial d} u(d) \right| + \left| \frac{\partial c_{\text{eff}}}{\partial \tau_0} u(\tau_0) \right| = \frac{c_{\text{eff}}}{d} |u(d)| + \frac{c_{\text{eff}}}{\tau_0} |u(\tau_0)|. \quad (6.4)$$

Aus der Abtastfrequenz der Signale durch die Messkarte (51,2 kHz) folgt eine zeitliche Auflösung der empfangenen und digitalisierten Schallsignale von etwa 20  $\mu\text{s}$ , welche durch Interpolation von Zwischenwerten erhöht werden kann. Zur Abschätzung des Größtfehlers wird eine resultierende Unsicherheit bei der Laufzeitmessung im Bereich von 3  $\mu\text{s}$  angenommen.

Die Unsicherheit bei der Entfernungbestimmung hängt vorrangig von der verwendeten Messmethode ab. Für kleine Entfernungen ( $< 2$  m) werden die Positionen der Sender und Empfänger mit einem Metermaß bestimmt. Die Abweichung liegt hier in der Größenordnung von 1 mm. Für größere Entfernungen erfolgt die Positionsbestimmung mit dem Lasermeter DISTO basic der Firma Leica<sup>6</sup> bzw. dem elektrischen Tachymeter Elta 5 der Firma Zeiss<sup>7</sup>. Der Messbereich des DISTO basic erstreckt sich laut Hersteller von 0,3 m bis

<sup>6</sup> Leica Geosystems AG, Geodesy, CH-9435 Heerbrugg, Switzerland

<sup>7</sup> Carl Zeiss AG, Geschäftsbereich Vermessung, 73446 Oberkochen, Germany

30 m, die Reichweite des Elta 5 wird mit bis zu 1 km beim Einsatz von einem Prismenspiegel angegeben. Die Unsicherheit bei der Entfernungsbestimmung liegt bei beiden Geräten laut Hersteller in der Größenordnung von 5 mm.

Substituiert man die Laufzeitabhängigkeit in Gleichung (6.4), kann die Unsicherheit bei der Bestimmung der effektiven Schallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Entfernung zwischen Schallsender und Empfänger ausgedrückt werden

$$u(c_{\text{eff}}) = \frac{c_{\text{eff}}}{d} |u(d)| + \frac{c_{\text{eff}}^2}{d} |u(\tau_0)|. \quad (6.5)$$

Die maximalen Unsicherheiten der Laplace'schen Schallgeschwindigkeit  $u(c_L)$  und der Strömung  $u(|v|)$  können abgeschätzt werden zu

$$u(c_L) = |u(c_{\text{eff}})| \quad \text{bzw.} \quad u(|v|) = |u(c_{\text{eff}})|. \quad (6.6)$$

Die Unsicherheit bei der Temperaturbestimmung lässt sich aus der Abhängigkeit der akustisch virtuellen Temperatur von der Laplace'schen Schallgeschwindigkeit (Gleichung (2.35)) bestimmen. Diese ist gegeben durch

$$u(T_{\text{av}}) = 2 \frac{c_L}{\gamma_{\text{tr}} \cdot R_{\text{tr}}} |u(c_L)| = 2 \frac{T_{\text{av}}}{c_L} |u(c_L)|. \quad (6.7)$$

Bei kleinen Strömungsgeschwindigkeiten, d. h. für  $c_{\text{eff}} \approx c_L$ , lässt sich die Temperaturunsicherheit schreiben als

$$u(T_{\text{av}}) = 2 \frac{T_{\text{av}}}{d} (|u(d)| + c_L |u(\tau_0)|). \quad (6.8)$$

Die Unsicherheiten für Strömung bzw. Temperatur, welche sich nach den Gleichungen (6.6) bzw. (6.8) berechnen lassen, sind als absolute Unsicherheiten in Abbildung 48 abhängig von der Entfernung zwischen Sender und Empfänger dargestellt.

Für Messungen mit dem Tomographiemodell (vgl. Abbildung 38), bei welchem die Messfläche eine Ausdehnung von 1,23 m  $\times$  1,23 m aufweist und Schallweglängen bis maximal 1,7 m realisiert werden können, beträgt die Unsicherheit für die Temperaturbestimmung demnach über 1,4 K und diejenige für die Strömung über ca. 0,8 m s<sup>-1</sup>.

Wesentlichen Einfluss auf diese hohen Unsicherheiten hat die Unsicherheit bei der Bestimmung der Schallweglängen. Untersucht man relative Änderungen der Temperatur und Strömung bezüglich einer (bekannten) Ausgangssituation, können die Unsicherheiten bei der Entfernungsbestimmung vernachlässigt werden, wenn sich der Aufbau während einer Messung nicht ändert. In diesem Fall ergibt sich eine relative Unsicherheit für Temperatur und Strömung, welche lediglich von der Unsicherheit bei der Laufzeitbestimmung abhängt und als schwarz gestrichelte Linie in Abbildung 48 dargestellt ist. Relative Messungen bezüglich einer Anfangsverteilung können für das Tomographiemodell demnach mit einer Temperaturunsicherheit von minimal 0,4 K und einer Unsicherheit der Strömungsbestimmung von 0,2 m s<sup>-1</sup> realisiert werden. Aus dem Zusammenhang der Unsicherheiten geht

weiterhin hervor, dass zu geringe Abstände zwischen Sendern und Empfängern vermieden werden sollten, um signifikante Werte für Temperatur und Strömung berechnen zu können. Neben den zufälligen Fehlern, welche in den letzten Absätzen analysiert wurden, treten bei akustischen Laufzeitmessungen systematische Fehler auf. Hierzu zählt die Verzögerung der Schallaussendung, welche durch die Messkarte hervorgerufen wird (Kapitel 6.1.1), sowie die Bandpassbegrenzung der Signale durch die akustischen Komponenten des Messsystems, welche ebenfalls eine Verschiebung des Kreuzkorrelationsmaximums bewirkt. Weiterhin verursacht die räumliche Ausdehnung der Sensoren, insbesondere der Lautsprecher, die Messung einer scheinbar größeren Laufzeit, als nach den Gleichungen (5.1) sowie (2.35) und (2.39) erwartet.

Der Einfluss dieser Effekte kann jedoch durch Messungen bei bekannten Umgebungsbedingungen bezüglich Temperatur, Gaszusammensetzung und Strömung für die einzelnen Sender- und Empfängerstrecken bestimmt werden. Hierfür werden aus den bekannten Temperatur- und Strömungsdaten für verschiedene Entfernungen theoretisch erwartete Schalllaufzeiten berechnet und mittels akustischen Laufzeitmessungen praktisch ermittelt. Betrachtet man die Abhängigkeit der gemessenen Laufzeiten von den berechneten Werten, ergibt sich ein konstanter Versatz, die Latenz- oder Verzögerungszeit. Diese kann genutzt werden, um die Laufzeitmessungen bei akustisch tomographischen Untersuchungen zu korrigieren.

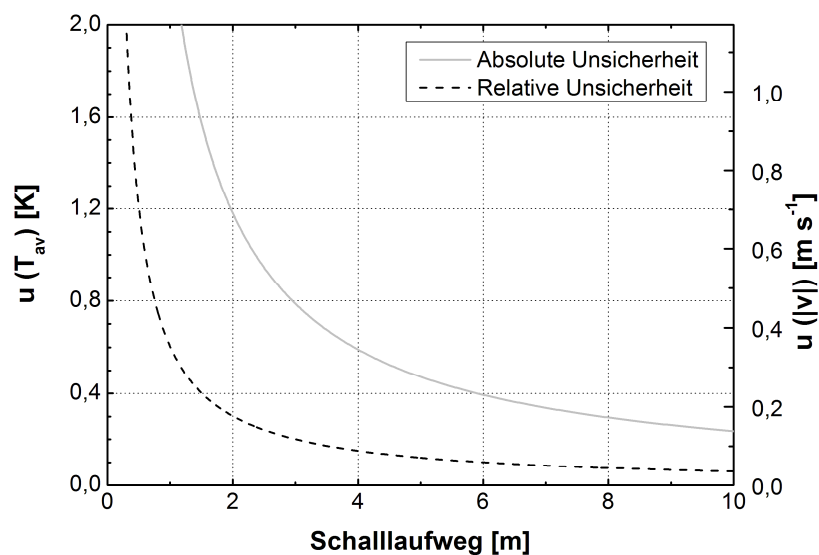


Abbildung 48: Unsicherheiten bei der Bestimmung von Temperatur und Strömung aus akustischen Laufzeitmessungen bei einer akustisch virtuellen Temperatur von 293.15 K. Unsicherheiten ohne Referenzmessung (absolute Unsicherheiten) ergeben sich unter Berücksichtigung des gekoppelten Einflusses der Unsicherheiten bei Laufzeit- und Entfernungsbestimmung. Unsicherheiten mit Referenzmessung (relative Unsicherheiten) beziehen sich auf Messungen, welche im Vergleich zu einer Anfangs-/ Referenzmessung unter bekannten homogenen Bedingungen (keine Temperaturunterschiede, keine Strömung) im Untersuchungsgebiet vorgenommen werden. Aus der Initialmessung können Laufwegkorrekturen abgeleitet werden, so dass bei den nachfolgenden Messungen die Unsicherheiten infolge der Entfernungsbestimmung vernachlässigt werden können.

Vergleichsmessungen zwischen akustisch bestimmten Temperatur- und Strömungswerten sowie alternativen Messverfahren wurden im Rahmen einer Diplomarbeit (Seliger, 2005) durchgeführt. Die Bestimmung der Lufttemperatur sowie der Luftfeuchte erfolgte mit Hilfe eines Aspirationspsychrometers nach Assmann (Assmann, 1892; aktuelles Messgerät siehe Fischer, 2006). Aus diesen Daten konnte nach Gleichung (2.34) die akustisch virtuelle Temperatur berechnet werden. Ein Vergleich dieser Temperatur mit der akustisch bestimmten Temperatur hat gezeigt, dass die Größen im Bereich der Fehlertoleranzen der Messsysteme übereinstimmen. Untersuchungen im Windkanal haben weiterhin gezeigt, dass die Ergebnisse der Strömungsmessung ebenfalls vergleichbare Werte liefern.

## 6.4. Beispiel einer Laufzeitmessung

Im folgenden Abschnitt soll ein kurzes Beispiel die Laufzeitbestimmung demonstrieren. Hierfür wurden 4 Schallsender in verschiedenen Abständen, zwischen etwa 0,4 m und 1,4 m, von einem Empfänger positioniert. Als Sendesignal wurden Maximallängenfolgen vom Grad 13, bestehend aus  $2^{13}-1 = 8191$  Abtastwerten, gewählt. Entsprechend der akustischen Messkarte, welche mit einer Abtastrate von 51,2 kHz arbeitet, entspricht dies einer Signaldauer von ca. 160 ms. Für jeden Schallsender wurde eine andere MLS erzeugt und alle Signale gleichzeitig ausgesendet. Das am Lautsprecher detektierte Signal, welches ab Aussendung für eine Länge von 1 s empfangen wurde, ist in Abbildung 49 dargestellt.

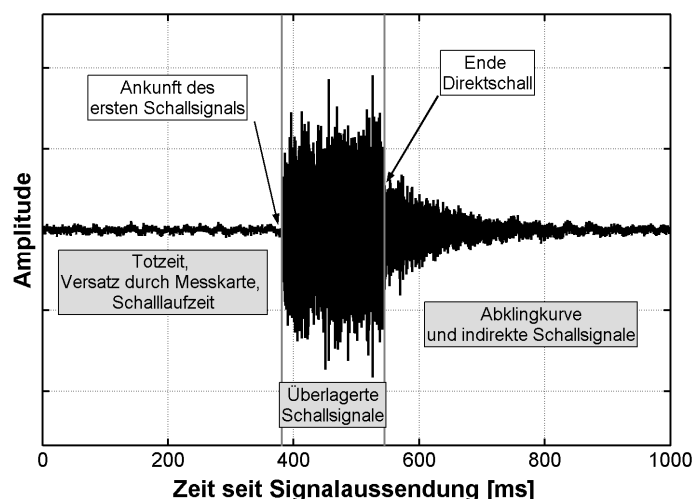


Abbildung 49: An einem Mikrophon empfangenes Zeitsignal von vier Lautsprechern. Die Aussendung der Schallsignale erfolgte gleichzeitig, der räumliche Abstand der Sender zum Empfänger betrug zwischen 0,4 m und 1,4 m. Jeder Sender hat eine andere Maximallängenfolge vom Grad 13 (8191 Werte, Signaldauer ca. 160 ms) ausgesendet.

Das empfangene Signal kann in drei Bereiche unterteilt werden. Am Anfang, bis ca. 382 ms, sind lediglich geringe Amplitudenschwankungen festzustellen. Dieser Abschnitt enthält neben der Laufzeit der Schallsignale die zeitliche Verzögerung der Schallaussendung, welche durch die Messkarte hervorgerufen wird (Kapitel 6.1.1) sowie die akustische

Totzeit (Latenz-/ Verzögerungszeit), welche im Wesentlichen von den Schallsendern abhängt. Der zeitliche Versatz, der durch die Messkarte hervorgerufen wird, wurde durch direkte Rückkopplung der Ausgänge an die Eingänge für die verwendete Messkarte zu 19495 Abtastwerten bestimmt.

Der zweite Bereich ist durch die Ankunft der überlagerten Messsignale gekennzeichnet. Hier ist die Amplitude deutlich höher und hat einen nahezu konstanten Verlauf. Der Beginn des Amplitudenabfalles, welcher bei ca. 545 ms einsetzt, entspricht dem Ende des Empfangs der direkten Schallsignale. Die Gesamtdauer der Signalübertragung kann daher mit etwa 163 ms angegeben werden und entspricht der Länge der Schallsignale zuzüglich ihrer maximalen Laufzeit.

Der dritte Aufzeichnungsabschnitt ist durch einen Amplitudenrückgang auf das Ausgangsniveau geprägt. Ursache für den allmählichen Rückgang sind zum einen Ausschwingvorgänge des akustischen Systems, zum anderen verzögerte Signalankünfte durch verschiedenartige Reflexionen an Begrenzungsflächen innerhalb des Messraumes.

Um die Laufzeitdaten zu bestimmen, wurden die ersten 19495 Werte des empfangenen Signals abgeschnitten und die verbleibende Zeitreihe jeweils mit den Maximallängenfolgen der einzelnen Schallsender kreuzkorreliert. Die Ergebnisse der Kreuzkorrelation zeigt Abbildung 50. Deutlich sichtbar sind die Maxima der KKF, welche bei verschiedenen zeitlichen Verschiebungen bezüglich der Schallaussendung zu finden sind. Weiterhin fällt auf, dass die Amplitude der Maxima in Abhängigkeit von der zeitlichen Verschiebung variieren, wobei große Amplituden bei geringen Verschiebungen auftreten. Da eine geringe Verschiebung einer kurzen Laufzeit und damit im Allgemeinen einer geringen Entfernung zwischen Sender und Empfänger entspricht, ist dies auf die weniger stark gedämpfte Amplitude des empfangenen Signals selbst zurückzuführen.

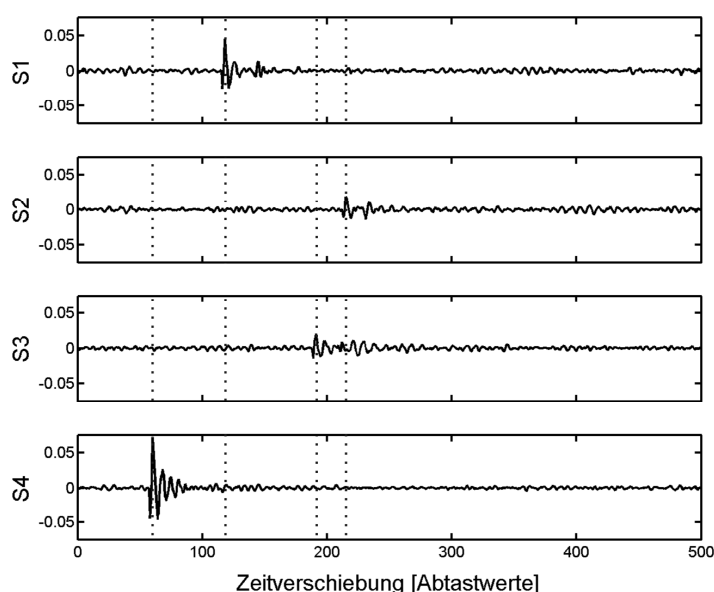


Abbildung 50: Kreuzkorrelationsfunktionen des empfangenen Signals mit den vom jeweiligen Sender (S1, S2, S3 und S4) gesendeten Maximallängenfolgen. Die Lage der Maxima entspricht der Laufzeit der akustischen Signale und ist in den Zeitverläufen für alle Sender durch eine gepunktete Linie gekennzeichnet.



Die Lage des Maximums der jeweiligen KKF wurde bestimmt, nachdem eine Interpolation von Zwischenwerten (vgl. Kapitel 3.5) durchgeführt wurde. Um die tatsächliche Schalllaufzeit zu erhalten, wurde von diesem Wert die Totzeit der Schallsender (3 Abtastwerte) subtrahiert. Die Ergebnisse für die einzelnen Strecken der Beispielmessung sowie deren Unsicherheiten sind in Tabelle 8 zusammengefasst.

*Tabelle 8: Messdaten für verschiedene Schallstrecken, welche durch gleichzeitiges Aussenden von vier Maximallängenfolgen vom Grad 13 und anschließender Kreuzkorrelation gewonnen wurden. Die Fehlerangaben ergeben sich aus den theoretischen Betrachtungen in Kapitel 6.3.*

Sender	Laufweg in m	Laufzeit in ms	$c_{\text{eff}}$ in $\text{m s}^{-1}$
S1	0,766	2,237	$342,4 \pm 1,8$
S2	1,424	4,138	$344,1 \pm 1,0$
S3	1,258	3,658	$343,9 \pm 1,1$
S4	0,378	1,108	$341,2 \pm 3,7$

Die resultierenden effektiven Schallgeschwindigkeiten sind in einem Bereich zwischen  $341,2 \text{ m s}^{-1}$  und  $344,1 \text{ m s}^{-1}$  angesiedelt. Die Differenzen zwischen den Werten liegen jedoch zum Teil im Unsicherheitsbereich der Messungen für die betrachteten Entfernungen. Es wird ebenfalls deutlich, dass die Abweichungen der Werte bei kleinen Entfernungen deutlich größer sind, als die Abweichungen bei vergleichsweise langen Messstrecken. Es ist bei dem Entwurf des Aufbaus der Sender und Empfänger für akustisch tomographische Messungen daher darauf zu achten, nicht zu geringe Laufwege zuzulassen.



## 7. Experimentelle Umsetzung

Ziel der akustischen Laufzeitomographie ist die Erfassung meteorologischer Parameter in ihrer flächenhaften Verteilung. Bisher wurden Rekonstruktionen synthetisch erzeugter Felder gezeigt sowie Laufzeitmessungen entlang einzelner Schallausbreitungswege. In den folgenden Abschnitten werden zwei Beispiele tomographischer Messungen für verschiedene Fragestellungen dargestellt.

### 7.1. Atmosphären-Simulationskammer SAPHIR

Die Atmosphären-Simulationskammer SAPHIR (Simulation of Atmospheric **PH**otochemistry In a large **R**eaction chamber) ist ein experimentelles Großgerät auf dem Gelände des Forschungszentrums Jülich, Institut für Chemie und Dynamik der Geosphäre II: Troposphäre (50°54'33.2"N, 6°24'43.6"E), und dient der Untersuchung photochemischer Prozesse der Troposphäre unter naturnahen Bedingungen. Die Kammer hat eine nahezu zylindrische Form mit einem Durchmesser von 5 m und einer Länge von 18 m. Die Längsachse des Zylinders verläuft in Nord-Süd-Richtung. Das eingeschlossene Gasvolumen (270 m<sup>3</sup>) wird von einer doppelwandigen Teflonfolie begrenzt, die für ultraviolette Strahlung durchlässig ist (Bohn und Zilken, 2004). Die Teflonhülle ist an einem Metallrahmen befestigt und kann durch ein Jalousiensystem abgeschattet werden (Abbildung 51). Es erfolgt keine thermische Isolation des Gasvolumens in der Atmosphären-Simulationskammer, so dass die Temperaturen in der Kammer den Umgebungstemperaturen folgen. Die Gaszusammensetzung, insbesondere die Konzentration atmosphärischer Spurengase, ist in SAPHIR an verschiedenste troposphärische Fragestellungen anpassbar (Brauers et al., 2007; Schlosser et al., 2007). Die Atmosphären-Simulationskammer bietet somit die Möglichkeit, komplexe Systeme atmosphärischer Chemie gezielt zu untersuchen. Störungen durch nicht quantifizierbare oder unbekannte Quellen von Spurengasen, Transportphänomene von Bestandteilen durch z. B. Wind sowie unzuverlässige Witterungsverhältnisse können ausgeschlossen werden. Des Weiteren können die Untersuchungsbedingungen wohldefiniert reguliert werden und zeichnen sich durch ihre Reproduzierbarkeit aus. Die Ergebnisse, die aus Untersuchungen in SAPHIR gewonnen werden, dienen der Verifizierung von troposphärischen Chemiemodellen sowie der Verbesserung des Verständnisses chemischer Prozesse. Des Weiteren können in der Kammer verschiedene Messverfahren miteinander verglichen sowie Ergebnisse von Feldexperimenten unter definierten Bedingungen nachempfunden werden (SAPHIR, 2005).

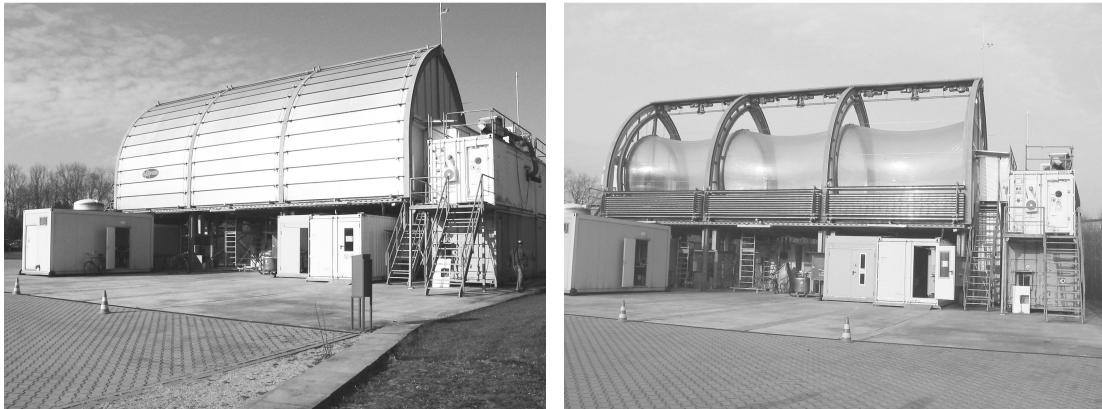
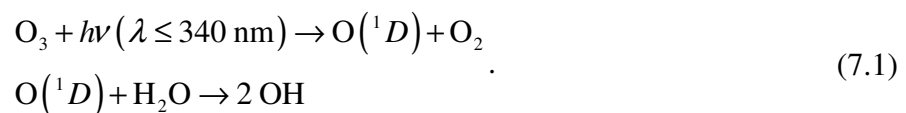


Abbildung 51: Atmosphäresimulationskammer SAPHIR (Simulation of Atmospheric PHotochemistry In a large Reaction chamber) zur Untersuchung photochemischer Prozesse unter definierten naturnahen Bedingungen. Die Untersuchung der chemischen Prozesse im Gasvolumen kann bei unterschiedlichen Lichtverhältnissen erfolgen. Hierfür wird ein Jalousiensystem genutzt, welches in geschlossenem Zustand ein Eindringen solarer Strahlung in das Messvolumen vollständig verhindert (links) bzw. bei vollständiger Öffnung (rechts) ungehindert zulässt. Die Längsachse der Kammer verläuft in Nord-Süd-Richtung. Die dargestellten Aufnahmen wurden aus (nord-) östlicher Richtung aufgenommen.

### 7.1.1. Hintergrund der Messung

Die Beschreibung chemischer Prozesse erfolgt in Abhängigkeit von den zur Verfügung stehenden chemischen Elemente, deren Konzentration sowie den Umgebungsbedingungen während der Reaktion. Wesentliche Prozesse, die in SAPHIR untersucht werden, sind durch photochemische Umwandlungen angetriebene Folgen chemischer Reaktionen. Zum Beispiel zerfällt Ozon ( $O_3$ ) durch den Einfall hochenergetischer solarer UV-B-Strahlung ( $h\nu$ ;  $\lambda$ : Wellenlänge) in ein energetisch angeregtes Sauerstoffatom ( $O(^1D)$ ) sowie ein Sauerstoffmolekül ( $O_2$ ). Das  $O(^1D)$  reagiert daraufhin z. B. mit Wasserdampf, wodurch zwei Hydroxyl-Radikale ( $OH$ ) gebildet werden. Diese wiederum reagieren mit einer Vielzahl von Spurengasen in der Atmosphäre und tragen damit zu deren Abbau bei (z. B. Bohn und Zilken, 2004)



Die Geschwindigkeit, mit der die chemischen Reaktionen ablaufen, ist maßgeblich von den Reaktionspartnern und deren Konzentration abhängig. Für photochemische Prozesse bewirkt eine erhöhte Bestrahlungsstärke im entsprechenden Wellenlängenbereich eine Erhöhung der Reaktionsgeschwindigkeit. Findet die Reaktion ohne den Einfluss von Strahlung statt, hängt die Reaktionsgeschwindigkeit im Allgemeinen von der Temperatur des Reaktionsgemisches ab (Atkins, 2001).

Neben der Bestimmung der aktuellen Zusammensetzung des Gasgemisches wird in SAPHIR bei den Untersuchungen auch die Temperatur erfasst. Dies erfolgt mit einem Ult-

raschallanemometer USA-1 der Firma METEK<sup>8</sup> (Bohn et al., 2005). Ein solches Gerät bestimmt die Temperatur (akustisch virtuelle Temperatur) und den dreidimensionalen Strömungsvektor innerhalb eines kleinen Volumens. Das Messprinzip beruht auf der Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Temperatur und Strömungsgeschwindigkeit entlang des Ausbreitungsweges akustischer Signale. Über die Bestimmung der Laufzeit kurzer akustischer Ultraschallimpulse zwischen fixierten Sender- und Empfängerpaaren mit einem Abstand von 17,5 cm werden auf die meteorologischen Parameter geschlossen. Aufgrund des großen Messvolumens in SAPHIR kann diese Temperaturmessung als Punktmessung betrachtet werden. Aussagen über die horizontale oder vertikale Verteilung der Temperatur können damit nicht getroffen werden.

Zur Beschreibung der Reaktionsgeschwindigkeiten wird jedoch eine homogene Verteilung der Temperatur im gesamten Kammervolumen vorausgesetzt. Bei gleichmäßiger Verteilung der Gasbestandteile innerhalb des Kammervolumens wird daher von Reaktionen ausgegangen, die im Zeitbereich der Messung überall mit gleicher Geschwindigkeit ablaufen. Das System der akustischen Tomographie ist bei geeigneter Anordnung der akustischen Messstellen in der Lage, Aussagen über die Verteilung der Temperatur zu treffen. Um mögliche Temperaturunterschiede durch Strahlungsprozesse in SAPHIR abzuschätzen, ist insbesondere die Homogenität der vertikalen Temperaturschichtung von Interesse, die bei verschiedenen Intensitäten der Bestrahlung der Atmosphären-Simulationskammer durch solare Strahlung erreicht wird.

Die Untersuchungen der Reaktionskinetik in der Atmosphären-Simulationskammer erfolgen über eine Zeitspanne im Bereich von einigen Stunden. Aufgrund der thermischen Kopplung von SAPHIR an die Umgebung können in einem solchen Zeitintervall Temperaturschwankungen im Bereich von 6 bis 8 K auftreten (Bohn et al., 2005; Poppe et al., 2007). Mit diesem Hintergrund kann das Kammervolumen hinsichtlich der temperaturabhängigen Reaktionskonstanten chemischer Prozesse als (chemisch) homogen betrachtet werden, wenn die Temperaturunterschiede innerhalb des Volumens zu einer Zeit einen Wert von 6 bis 8 K nicht überschreiten. Andernfalls wäre eine lokal differenzierte Betrachtung chemischer Reaktionsgeschwindigkeiten erforderlich.

### 7.1.2. Messtechnik

Im Rahmen der Routinemessungen werden in der Atmosphären-Simulationskammer verschiedene Daten aufgezeichnet. Zu ihnen zählen Temperatur-, Feuchte- und Druckwerte, Indikatoren über den Zustand der Beschattung der Kammer (Jalousienöffnung, Giebel, Schatten) sowie der Sonnenzenitwinkel. Ein Ultraschallanemometer liefert minütlich Daten zur akustisch virtuellen Temperatur und zur Strömung (dreidimensionaler Windvektor) an einem Punkt in der Kammer.

---

<sup>8</sup> METEK GmbH, Fritz-Straßmann-Str. 4, 25337 Elmshorn, Germany

Ziel der Untersuchungen in SAPHIR war das Erfassen der vertikalen Temperaturstruktur innerhalb des Kammervolumens in Abhängigkeit von externen Parametern wie solarer Einstrahlung. Zu diesem Zweck wurde das akustisch tomographische System parallel zu den Giebelseiten in vertikaler Ausrichtung in der Atmosphären-Simulationskammer installiert (Abbildung 52, links). Die akustische Messkarte, ein Vorgängermodell der in Kapitel 6.1.1 beschriebenen Hardware, verfügte über jeweils 4 separate Sende- und Empfangskanäle bei sonst gleichen Messparametern wie der Digitalisierungszeit von 51,2 kHz. Durch die Nutzung von insgesamt 8 Schallsendern und 4 Empfängern wurde die zum Messzeitpunkt verfügbare Kanalzahl vollständig ausgenutzt, wobei ein Sendesignal zeitgleich von jeweils zwei Lautsprechern ausgesendet wurde. Die Sensoren wurden an einer quadratischen Rahmenkonstruktion befestigt und so ausgerichtet, dass die eingeschlossene Untersuchungsfläche homogen von Schallstrecken durchlaufen wird und aufgrund der Laufwegdifferenzen eine eindeutige Zuordnung der Sendesignale zum entsprechenden Lautsprecher gewährleistet ist. Die Länge der Messstrecken zwischen den einzelnen Sender- und Empfängerpaaren im Untersuchungsgebiet variierte zwischen 0,9 m und 3,8 m.

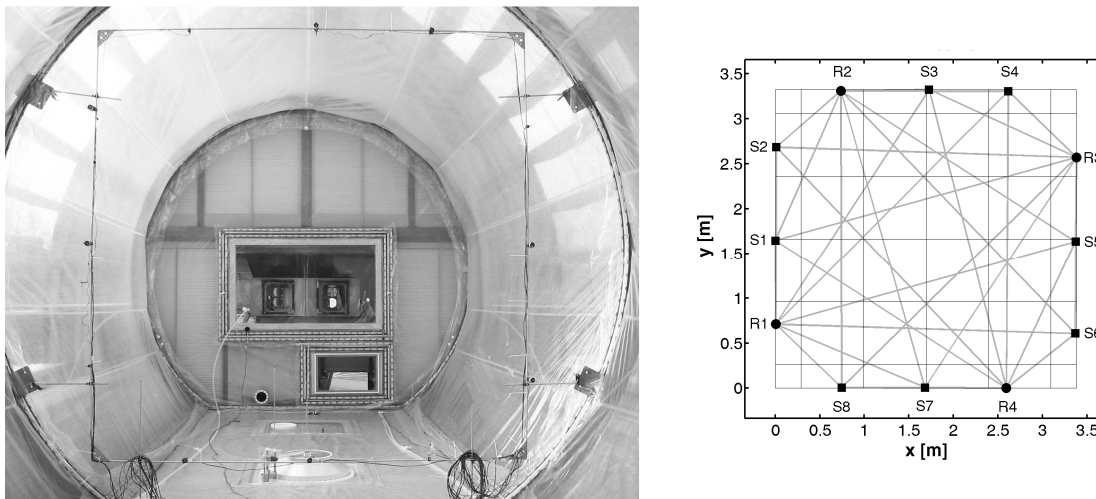


Abbildung 52: Akustische Tomographiemessfläche in SAPHIR mit einer Ausdehnung von  $3,3\text{ m} \times 3,3\text{ m}$ . Links: Vertikale Anordnung der quadratischen Rahmenkonstruktion mit den daran befestigten Schallsendern und Empfängern im Inneren der Atmosphären-Simulationskammer (Blick in Richtung Nordgiebel). Rechts: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus bestehend aus 8 Schallsendern (S1...S8) und 4 Empfängern (R1...R4), den sich ergebenden Schallstrecken (graue Linien) sowie die Gitterzelleneinteilung (dünne schwarze Linien) für die tomographische Rekonstruktion. Die Kantenlänge der zentralen Gitterzellen beträgt  $0,7\text{ m}$ .

Die Gesamtausdehnung der quadratischen Messfläche betrug  $3,3\text{ m} \times 3,3\text{ m}$ . Sie wurde in Gitterzellen unterteilt, die im zentralen Bereich eine Größe von  $0,7\text{ m} \times 0,7\text{ m}$  aufwiesen (Abbildung 52, rechts). Die Rahmenkonstruktion wurde zentral im Querschnitt von SAPHIR angebracht, so dass sich die untere Grenze der Messfläche  $0,85\text{ m}$  über und die obere Messflächengrenze in  $4,15\text{ m}$  über der unteren Folienbegrenzung der Atmosphären-Simulationskammer befand.

Als akustische Signale wurden 4 verschiedene Maximallängenfolgen vom Grad 13 (Signallänge: 160 ms) eingesetzt. Die Signale wurden alle 10 Sekunden ausgesendet, empfangen und in Laufzeiten umgerechnet.

Für Vergleichsmessungen wurden zwei HUMITTER 50 Y – Messfühler der Firma Vaisala<sup>9</sup> in zwei verschiedenen Höhen (0,4 m und 3,3 m) innerhalb der Kammer angebracht. Diese Messgeräte erfassen Temperatur (Widerstandsthermometer; Pt 1000 Sensor) und Feuchte (kapazitiver Feuchtesensor) an jeweils einem Punkt. Die Messfühler sind in ventilierten Strahlungsschutzhütten untergebracht (Abbildung 53). Sie setzen sich aus einem doppelwandigen polierten Edelstahlrohr zusammen, an dessen oberem Ende ein Ventilator angebracht ist. Die Behausung verhindert das direkte Auftreffen von solarer Strahlung und minimiert somit einen Strahlungseinfluss auf die gemessenen Temperatur- und Feuchtwerte. Der Ventilator führt die Luft am Sensor vorbei und garantiert eine Strömungsgeschwindigkeit von mindestens  $3 \text{ m s}^{-1}$ . Laborexperimente haben gezeigt, dass mit den HUMITTER 50 Y-Sensoren in den beschriebenen Hütten eine Genauigkeit von unter 0,1 K für die Temperatur und eine Genauigkeit von 3% für die relative Feuchte erreicht werden kann (Schienbein und Arnold, 2001; Schienbein und Arnold, 2002). Zeitliche und räumliche Unterschiede zwischen den beiden Messpunkten sind mit diesen Fühlern daher gut nachweisbar. Die Abtastung der Daten erfolgte alle 3 Sekunden, die Aufzeichnung von Mittelwerten alle 30 s.



Abbildung 53: Ventilierter Strahlungsschutzhütte mit HUMITTER 50 Y-Fühler, montiert in 3,3 m Höhe innerhalb SAPHIR.

### 7.1.3. Ergebnisse der Messungen - Temperaturverteilung

Die Messungen in der Atmosphären-Simulationskammer SAPHIR in Abhängigkeit von der Beschattung des Gasvolumens erfolgten im Zeitraum vom 27.03.2004-30.03.2004. Die Großwetterlage im Westen Deutschlands war während des Messzeitraumes (ab 28.03.) durch Hochdruckeinfluss geprägt. Es war trocken und wolkenlos. Entsprechend des Sonnenstandes und unter Berücksichtigung der Durchlässigkeit der Atmosphäre für solare Strahlung in Abhängigkeit vom Lichtweg durch die Atmosphäre nach einer einfachen Pa-

<sup>9</sup> Vaisala Oyj, P.O. Box 26, FIN-00421 Helsinki, Finland

rametrisierung von Burrige und Gadd im Jahr 1974 (s. Stull, 1997) betrug der maximale Energieeintrag durch solare Einstrahlung bei Sonnenhöchststand an diesen Tagen um  $850 \text{ W m}^{-2}$ . Die Tageshöchsttemperaturen stiegen von anfänglich  $7^\circ\text{C}$  am 27.03.2004 auf  $18^\circ\text{C}$  am 30.03. an. Die nächtlichen Tiefstwerte stiegen im selben Zeitraum von anfänglich  $-4^\circ\text{C}$  auf  $5^\circ\text{C}$  zum Ende der Messperiode hin an.

Für die Analyse der vertikalen Temperaturstruktur wurden alle 10 Sekunden akustische Laufzeitmessungen entlang 32 verschiedener Schallwege durch das Untersuchungsgebiet durchgeführt. Die tomographische Rekonstruktion der Temperaturwerte erfolgte im Anschluss an die Messung für die zuvor festgelegte Gitterzellengröße direkt aus den gemessenen Laufzeitdaten. Zur Berechnung der Temperaturen wurde eine schwache Kopplung zwischen den einzelnen Zellen zugelassen (Wichtungsfaktor: 0,01 für alle Nachbarzellen; vgl. Kapitel 5.1.2). Der iterative Prozess zur tomographischen Bestimmung der Temperaturwerte in den Gitterzellen wurde nach 100 Iterationsschritten abgebrochen.

Eine Trennung zwischen Temperatur- und Strömungseinfluss auf die Schallgeschwindigkeit wurde aus zwei Gründen bei dieser Messung nicht durchgeführt: Zum einen erlaubte die begrenzte Zahl der akustischen Messkanäle keine paarweise Anordnung der Schallsender und Empfänger. Eine entsprechende Anordnung mit bidirektionalen Streckenpaaren hätte mit je 4 Schallsendern und Empfängern eine wesentlich schlechtere räumliche Überdeckung des Messgebietes mit Schallstrecken bewirkt. Zum anderen wurden innerhalb des Untersuchungsgebietes Strömungsgeschwindigkeiten erwartet, die im Bereich der Messgenauigkeit der akustischen Messungen selbst liegen. In Anlehnung an die Betrachtungen in Kapitel 6.3 kann die Unsicherheit bei der Bestimmung der Schallgeschwindigkeit auf Schallstrecken zwischen 0,9 m und 3,8 m relativ zu einer Anfangsmessung mit  $\leq 0,35 \text{ m s}^{-1}$  für die kürzesten Strecken und  $\leq 0,1 \text{ m s}^{-1}$  für die längsten Strecken angegeben werden.

Zunächst wurden die Temperaturwerte, die mit den HUMITTER 50 Y-Fühlern gemessen wurden mit den akustisch tomographisch bestimmten Werten verglichen. Hierfür wurden räumliche Mittelwerte innerhalb des Tomographiegitters berechnet und eine zeitliche Mittelung von 6 Einzelmessungen (1-Minuten-Mittelwert) bestimmt. Die Temperaturwerte der HUMITTER 50 Y-Fühler wurden in akustisch virtuelle Temperaturwerte umgerechnet. Hierfür sind die relativen Feuchtwerte, welche ebenfalls mit den HUMITTER 50 Y-Fühlern bestimmt wurden, sowie Druckdaten einer unabhängigen Drucksonde zur Bestimmung der spezifischen Feuchte verwendet worden. Die Temperaturwerte in den beiden Messhöhen wurden anschließend ebenfalls gemittelt und 1-Minuten-Mittelwerte bestimmt. Ein beispielhafter zeitlicher Verlauf der mittleren akustisch virtuellen Temperaturen beider Systeme vom 29.03.2004 ist in Abbildung 54 gegenübergestellt. Zeitbereiche, in denen das Jalousiensystem vollständig geschlossen ist (Beschattung des Gasvolumens) sind als graue Flächen hinterlegt.

Beide Temperaturmessverfahren zeigen qualitativ einen ähnlichen zeitlichen Verlauf der Temperaturwerte. Nach einer leichten Auskühlung bis in die frühen Morgenstunden ist mit zunehmender Sonnenhöhe ein starker Temperaturanstieg zu beobachten, dessen Intensität am Vormittag leicht nachlässt. Nach Schließen des Jalousiensystems am Mittag, wird von



beiden Messverfahren ein Anstieg der Temperaturen erfasst, welche nach erneutem Öffnen des Daches auf das Niveau von vor der Schließung zurückgehen. Anschließend steigen sie erneut und erreichen am frühen Nachmittag ihr Maximum. Nach einem anfänglichen leichten Temperaturrückgang steigt die Temperatur nach dem Schließen des Jalousiensystems kurzzeitig erneut an und fällt dann kontinuierlich weiter bis zum Tagesende.

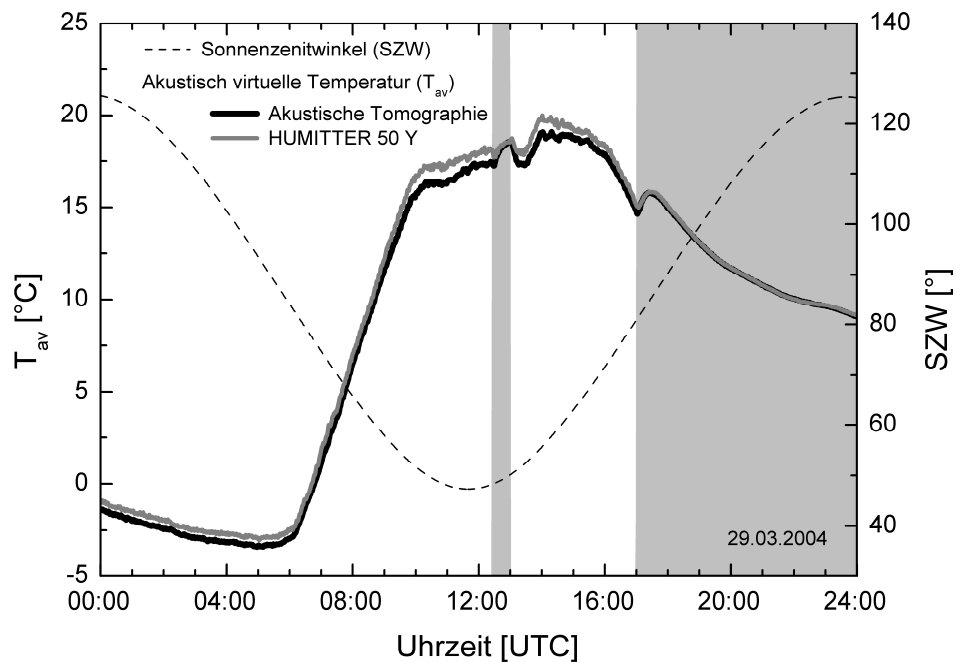


Abbildung 54: Gegenüberstellung von 1-Minuten-Mittelwerten der Flächenmitteltemperatur der vertikalen Messfläche (Mittlung aller Gitterzellenwerte nach tomographischer Rekonstruktion) und der akustisch virtuellen Temperatur, welche als Mittelwert der beiden HUMITTER 50 Y-Fühler unter Berücksichtigung der aktuellen Feuchte bestimmt wurde. Grau hinterlegte Flächen im Diagramm entsprechen Zeiten, in denen das Jalousiensystem vollständig geschlossen war.

Die quantitative Übereinstimmung zwischen den Temperaturwerten, welche mit den verschiedenen Messsystemen erfasst wurden, ist in den Zeitbereichen mit Beschattung der Kammer, insbesondere am Abend zwischen 19:00 und 23:00 UTC, maximal. Ist das Jalousiensystem geöffnet, weichen die Werte stärker voneinander ab und erreichen mit etwa 1,1 K Differenz ihr Maximum gegen 10:45 UTC. Eine Differenz der Temperaturwerte in der Größenordnung von 1 K tritt auch an den anderen Tagen auf, überschreitet einen Wert von 1,2 K jedoch nie.

Eine deckungsgleiche Übereinstimmung der Temperaturwerte konnte nicht erwartet werden. Grund hierfür ist die grundsätzliche Verschiedenheit der Messverfahren und des beprobten Volumens (Punktmessung vs. Linien- bzw. Flächenmessung). Zum anderen unterscheidet sich die räumliche Lage der Sensoren innerhalb der Kammer, so dass sich bei inhomogener Temperaturverteilung bereits hierdurch Differenzen ergeben können.

Eine weitere Ursache für Unterschiede zwischen den verschiedenen Verfahren liegt in der Bestimmung der Temperatur begründet. Die Berechnung dieser Werte erfolgt bei den akustischen Messungen unter Annahme einer konstanten Zusammensetzung des Gasgemisches in der Atmosphären-Simulationskammer. Das Gasgemisch in SAPHIR wurde durch einen Gasstrom, bestehend aus Stickstoff ( $N_2$ ) und Sauerstoff ( $O_2$ ) gespeist. Der Anteil an Sauerstoff am gesamten Gaszustrom betrug zwischen 21 Vol% und 23 Vol%, so dass eine mittlere Konzentration von 22 Vol% in der Atmosphären-Simulationskammer vorherrschte. Weitere Gasbestandteile im Messvolumen waren Wasserdampf und Kohlendioxid ( $CO_2$ ), dessen Konzentration sich über den gesamten Messzeitraum von anfänglich 900 ppm (0,09 Vol%; deutlich erhöhte Konzentration im Vergleich zur troposphärischen  $CO_2$ -Konzentration) kontinuierliche bis auf 40 ppm verringerte.

Entsprechend den Ausführungen in Kapitel 2.2.2 hängt die aktuelle Schallgeschwindigkeit nicht nur von der Temperatur und der Strömung im Ausbreitungsmedium ab, sondern auch von der Zusammensetzung des Gasgemisches. Eine Änderung der Zusammensetzung bewirkt vorrangig eine Änderung des Wertes der spezifischen Gaskonstante. Der Einfluss auf das Verhältnis der spezifischen Feuchten soll für diese Abschätzung vernachlässigt werden.

Die Anpassung der spezifischen Gaskonstante erfolgt entsprechend der tatsächlich vorhandenen Bestandteile, wobei sich die Ausführungen bezüglich eines Gemisches aus trockener Luft und Wasserdampf auf eine beliebige Mischung übertragen lassen. Die Berechnung der spezifischen Gaskonstante erfolgt dann unter Berücksichtigung der molaren Massen der einzelnen Gasbestandteile und ihrer Anteile am Gesamtvolumen nach Gleichung 2.21.

Zur Abschätzung des Einflusses der Gaszusammensetzung auf die Schallgeschwindigkeit soll zunächst ein Gasgemisch aus  $O_2$  und  $N_2$  mit einem festen Sauerstoffanteil von 22 Vol% betrachtet werden. Die Konzentration von  $CO_2$  soll entsprechend der Bedingungen in SAPHIR zwischen 0,09 Vol% und 0 Vol% variieren. Des Weiteren wird der Einfluss der Variabilität der Sauerstoffkonzentration im Bereich von 1 Vol% auf die resultierende spezifische Gaskonstante abgeschätzt. Die resultierenden Werte für die spezifische Gaskonstante und ihre relative Änderung bezüglich der Gaskonstante für ein Gemisch aus 22 Vol% Sauerstoff und 78 Vol% Stickstoff sind in Tabelle 9 zusammengestellt.

*Tabelle 9: Absolute und relative Variabilität der spezifischen Gaskonstante eines Gasgemisches mit variablem Anteil an  $CO_2$  bzw.  $O_2$ . Als Referenz  $R_{ref}$  für die relative Änderung wird die spezifische Gaskonstante bei einem reinen Sauerstoff-Stickstoff-Gemisch mit einem Volumenanteil von 22 Vol%  $O_2$  betrachtet.*

Vol% $O_2$	Vol% $N_2$	Vol% $CO_2$	$R_{mix}$ in $J\ kg^{-1}\ K^{-1}$	$(R_{mix}-R_{ref})/R_{ref}$ in %
22,00	78,00	0,00	287,79	0,00
22,00	77,91	0,09	287,65	-0,05
21,00	79,00	0,00	288,19	0,14
23,00	77,00	0,00	287,40	-0,14

Die Gegenüberstellung des Einflusses der Gaszusammensetzung auf die spezifische Gaskonstante des Gemisches in Tabelle 9 zeigt deutlich, dass eine Veränderlichkeit der Kohlendioxidkonzentration von 0,05% einen deutlich geringeren Einfluss auf die spezifische Gaskonstante hat als eine Variabilität der Sauerstoffkonzentration, wie sie aus den Zuflussdaten erwartet werden kann. Hier liegt die relative Änderung der spezifischen Gaskonstante bei 0,2%. Die relative Unsicherheit der spezifischen Gaskonstante  $u(R_{\text{mix}})/R_{\text{mix}}$  ist wiederum mit einer relativen Unsicherheit der Temperatur  $u(T_{\text{av}})/T_{\text{av}}$  verbunden. Diese ergibt sich entsprechend einer Größtfehlerabschätzung zu

$$\left| \frac{u(T_{\text{av}})}{T_{\text{av}}} \right| = \left| \frac{u(R_{\text{mix}})}{R_{\text{mix}}} \right| + 2 \left| \frac{u(c_L)}{c_L} \right|. \quad (7.2)$$

Entsprechend der obigen Abschätzungen für die relativen Änderungen der spezifischen Gaskonstante bei einer Variation des Sauerstoffanteiles von 1 Vol% ergibt sich ein Anteil an der Temperaturunsicherheit (Temperaturbereich von etwa  $-20^\circ\text{C}$  bis  $+40^\circ\text{C}$ ) von 0,4 K. Eine weitere Fehlerquelle bei den tomographisch bestimmten Temperaturwerten ist, dass keine Trennung zwischen Temperatur- und Strömungseinfluss auf die Schallgeschwindigkeit erfolgte. Eine Abschätzung dieses Effektes soll anhand der Betrachtung der Strömungsgeschwindigkeiten erfolgen, welche mit einem Ultraschallanemometer bestimmt wurden. Der Betrag der Strömung, berechnet aus den drei Komponenten der Geschwindigkeit, ist beispielhaft für den 29.03.2004 in Abbildung 55 dargestellt.

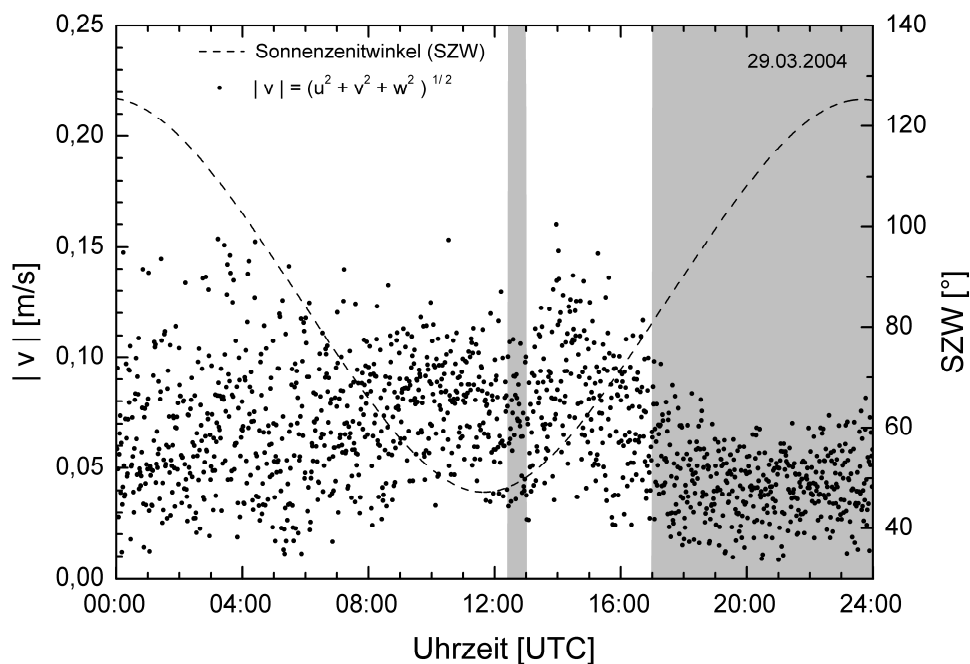


Abbildung 55: Zeitliche Variabilität der Strömungsgeschwindigkeit (1-Minuten-Mittelwerte) in der Atmosphären-Simulationskammer, gemessen mit einem Ultraschallanemometer. Grau hinterlegte Bereiche im Diagramm entsprechen Zeiten, in denen das Jalousiensystem vollständig geschlossen war.

Die geringsten Strömungsgeschwindigkeiten mit maximal  $0,1 \text{ m s}^{-1}$  treten am Abend des 29.03. bei Beschattung des Messvolumens auf. Höhere Werte werden tagsüber während geöffneten Jalousien erreicht, wenn die Strömungsgeschwindigkeiten bis zu  $0,16 \text{ m s}^{-1}$  ansteigen.

Daten zu den maximalen Strömungsgeschwindigkeiten in der Atmosphären-Simulationskammer während der Messperiode in Abhängigkeit von der Tageszeit sowie vom Grad der Beschattung des Messvolumens sind in Tabelle 10 zusammengestellt. Als „Tag“ wird eine Zeitspanne zwischen 8:00 UTC und 15:00 UTC bezeichnet, in der die Kammer von solarer Strahlung sicher beschienen wird (Sonnenzenitwinkel  $< 67^\circ$ ). Entsprechend wird der Zeitbereich „Nacht“ als Zeitspanne zwischen 18:00 UTC und 5:00 UTC am nächsten Morgen bezeichnet, in dem keine direkte solare Strahlung auf die Kammer trifft (Sonnenzenitwinkel  $> 90^\circ$ ).

Die Werte zeigen, dass die mittleren Strömungsgeschwindigkeiten unabhängig von der Tageszeit (Tag/ Nacht) oder des Beschattungszustandes (geöffnet/ geschlossen) bei unter  $0,1 \text{ m s}^{-1}$  liegen und damit deutlich unter der Empfindlichkeit des akustisch tomographischen Systems einzuordnen sind. Die höchsten Werte werden unabhängig von der Tageszeit bei geöffnetem Jalousiensystem erreicht und betragen bis  $0,2 \text{ m s}^{-1}$ .

Der Einfluss der Luftbewegung auf die tomographisch rekonstruierten Temperaturwerte kann anhand Gleichung (7.2) abgeschätzt werden. Bezogen auf die Schallgeschwindigkeit in trockener Luft bei  $0^\circ\text{C}$  ( $331,3 \text{ m s}^{-1}$ ) bewirkt eine Unsicherheit bei der Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in Höhe der Strömungswerte ( $0,2 \text{ m s}^{-1}$ ) eine Unsicherheit der Temperatur von  $0,3 \text{ K}$ .

*Tabelle 10: Abhängigkeit des Maximums der Strömungsgeschwindigkeit (1-Minuten-Mittelwert), gemessen mit einem Ultraschallanemometer, in Abhängigkeit von der Tageszeit sowie dem Zustand der Beschattung des Gasvolumens innerhalb der Atmosphären-Simulationskammer. Als „Tag“ wird der Zeitbereich zwischen 08:00 und 15:00 UTC bezeichnet, „Nacht“ entspricht den Zeiten zwischen 18:00 und 05:00 UTC.*

Beschattungszustand	Tageszeit	Strömungsmaximum in $\text{m s}^{-1}$	Mittlere Strömungsgeschwindigkeit
Dach geschlossen	Tag	0,12	0,05
	Nacht	0,12	0,05
Dach geöffnet	Tag	0,18	0,08
	Nacht	0,15	0,06

Anhand der vorgestellten Ursachen für Unsicherheiten bei der Temperaturbestimmung kann nun ein Größtfehler abgeschätzt werden. Aus den Unsicherheiten bei der Laufzeitbestimmung auf die Schallgeschwindigkeit (im Mittel  $0,25 \text{ m s}^{-1}$ ), der Gaszusammensetzung auf die Temperaturwerte ( $0,4 \text{ K}$ ) sowie der Vernachlässigung der Strömungsbedingungen innerhalb des Mediums ( $0,2 \text{ m s}^{-1}$ ), lässt sich die Unsicherheit bei der Bestimmung absoluter Temperaturwerte mit  $0,9 \text{ K}$  angeben. Betrachtet man die augenblickliche Verteilung der Temperaturwerte in der Messfläche kann eine homogene Verteilung des Gasgemisches

vorausgesetzt werden. Die Unsicherheit bei den gemessenen Temperaturwerten reduziert sich in diesem Fall auf den Einfluss der Strömung sowie die Unsicherheit bei der Laufzeitmessung und beträgt 0,5 K.

Die Abschätzung der Streubreite der Temperaturwerte in der Messfläche erfolgte durch Differenzbildung zwischen Flächenmaximum- und -minimumwert einer Einzelmessung. Der zeitliche Verlauf der Streubreite der Temperaturwerte für den 29.03.2004 ist in Abbildung 56 dargestellt. Für diesen Zeitraum sind ebenfalls die Differenzen der akustisch virtuellen Temperaturwerte der HUMITTER 50 Y-Fühler aufgetragen.

Der zeitliche Verlauf der Streuung der tomographisch bestimmten Flächenwerte der akustisch virtuellen Temperatur zeigt einen deutlichen Zusammenhang mit dem Zustand der Beschattung des Gasvolumens. Die geringsten Differenzen zwischen Flächenmaximumtemperatur und Minimumtemperatur treten nachts bei geschlossenem Dach auf. Ähnlich niedrig sind die Streuwerte nachts bei geöffnetem Jalousiensystem. Ein deutlicher Anstieg wird nach Sonnenaufgang bei geöffnetem Jalousiensystem beobachtet. Hier steigen die Differenzen innerhalb der Messfläche bis auf über 3 K an. Die Schließung der Jalousien um 12:25 UTC bewirkt einen sofortigen deutlichen Rückgang der Streuwerte auf ein nächstliches Niveau.

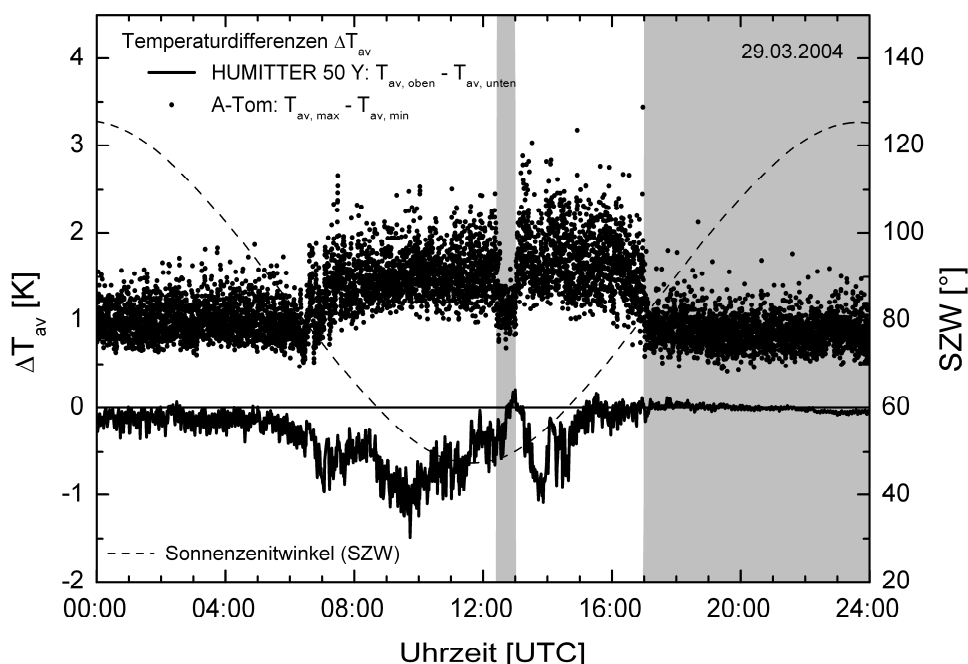


Abbildung 56: Zeitlicher Verlauf der Temperaturdifferenzen in SAPHIR. Dargestellt sind Differenzen der akustisch virtuellen Temperaturwerte (1-Minuten-Mittelwerte), der HUMITTER 50 Y-Fühler zwischen oberem (3,3 m) und unterem Standort (0,4 m) sowie die Streuung der rekonstruierten Gitterwerte der Temperatur in der vertikalen Tomographiemessebene. Die Streuwerte entsprechen Differenzen zwischen Flächenmaximum und Minimum der akustisch virtuellen Temperatur bei einer Einzelmessung mittels akustischer Tomographie (A-Tom). Grau hinterlegte Bereiche im Diagramm entsprechen Zeiten, in denen das Jalousiensystem vollständig geschlossen war.

Betrachtet man die Temperaturdifferenzen zwischen dem HUMITTER 50 Y-Fühler in 3,3 m Höhe und dem in 0,4 m Höhe, sind zum Teil ebenfalls deutliche Temperaturunterschiede zu erkennen. Ihr Maximum wird tagsüber bei geöffnetem Jalousiensystem erreicht (-1,5 K). Hierbei zeigt der untere Temperaturfühler einen höheren Wert an. Dies stimmt mit der klassischen Theorie überein, welche besagt, dass die solare Strahlung auf den Boden trifft, dort absorbiert und in Wärmestrahlung umgewandelt wird, um anschließend das Gasvolumen vom Boden her zu erwärmen. Bei geöffnetem Dach sind die Differenzen nachts, bei fehlender solarer Strahlung deutlich geringer als tagsüber. Nahezu keine Unterschiede zwischen den Temperaturwerten in den beiden Höhen treten nachts bei geschlossenem Dach auf.

Die Analyse der Temperaturen innerhalb der vertikalen Messfläche zeigt weiterhin, dass zu allen Zeiten eine Differenz der Temperaturwerte von 0,5 K nicht unterschritten wird. Tagsüber, bei geöffneter Jalousie, steigt dieses Minimum auf ca. 1 K an. Des Weiteren wird in der Abbildung die Streuung der Differenzwerte deutlich. Dieses Rauschen der Daten beträgt etwa  $\pm 0,5$  K nachts bzw. bei geschlossenem Dach tagsüber und steigt am 29.03.2004 auf  $\pm 0,8$  K bei geöffnetem Jalousiensystem am Tag an. Dieser Anstieg wird zum Teil durch den Anstieg der Strömungsgeschwindigkeiten bei Dachöffnung verursacht. Die Amplitude der Temperaturänderung liegt jedoch über dem möglichen Strömungseinfluss und spiegelt daher Fluktuationen der Temperatur innerhalb des Untersuchungsgebietes wider.

Vergleicht man die zeitlichen Verläufe der Temperaturdifferenzen aus Abbildung 56 mit den Verläufen der mittleren akustisch virtuellen Temperaturen aus Abbildung 54 kann festgestellt werden, dass die beste Übereinstimmung der raum-zeitlichen Mittelwerte der akustisch virtuellen Temperaturen beider Messsysteme genau dann erreicht wird, wenn die Unterschiede zwischen den beiden HUMITTER 50 Y-Fühlern nahezu Null ist (19:00 bis 23:00 Uhr). Diese Übereinstimmung der mittleren Temperaturwerte, sowohl der Flächen- als auch Punktmessungen, zeigt, dass die räumliche Verteilung der Temperatur innerhalb SAPHIR zu diesen Zeiten homogen ist. Die Streuung der Temperaturdifferenzen innerhalb der tomographischen Messfläche in diesem Zeitbereich kann daher als Hintergrundrauschen interpretiert werden, welches sich aus den oben genannten Unsicherheiten bei der Bestimmung der Temperatur aus Laufzeitmessungen ergibt.

Die Temperaturdifferenzen innerhalb der vertikalen Messfläche wurden für alle Messtage analysiert. Die resultierenden Werte für verschiedene Tageszeiten und Zustände der Beschattung der Kammer sind in Tabelle 11 zusammengestellt. Die höchsten Differenzen werden an allen betrachteten Tagen tagsüber bei geöffnetem Jalousiensystem erreicht. Sie steigen bei solarer Einstrahlung zum Teil auf Werte von über 3,5 K an. Im Mittel sind die Temperaturdifferenzen 1,2 K höher als die Differenzwerte bei geschlossener Beschattung am Tag bzw. bei den nächtlichen Werten. Die Unterschiede zwischen den nächtlichen Werten mit oder ohne Beschattung lassen keine signifikanten Unterschiede erkennen.

*Tabelle 11: Variation der akustisch virtuellen Temperatur innerhalb der vertikalen Messfläche. Zur Charakterisierung der Fläche wurden für verschiedene Tageszeiten und Zustände der Beschattung die Differenzen zwischen Flächenmaximumwert und Minimumwert der Temperatur bestimmt. Aufgeführt sind die maximalen Differenzen innerhalb eines Zeitintervalls sowie der Mittelwert der Differenzen im Zeitintervall in Klammern. Als „Tag“ wird der Zeitbereich mit solarer Strahlung zwischen 08:00 und 15:00 des jeweiligen Tages bezeichnet. „Nacht“ entspricht den Zeiten ohne solare Strahlung zwischen 00:00 und 05:00 sowie zwischen 18:00 und 23:59.*

Datum	Tag		Nacht	
	Dach offen	Dach geschlossen	Dach offen	Dach geschlossen
27.03.2004	2,8 K (1,5 K)	1,7 K (1,4 K)	1,9 K (1,0 K)	1,5 K (0,9 K)
28.03.2004	3,1 K (1,8 K)	1,6 K (1,2 K)	2,0 K (1,0 K)	1,6 K (0,9 K)
29.03.2004	2,5 K (1,5 K) 3,2 K (1,7 K)	1,9 K (1,2 K)	1,9 K (1,0 K)	2,1 K (0,9 K)
30.03.2004	3,6 K (2,0 K)	1,9 K (1,0 K)	2,1 K (1,1 K)	1,7 K (0,9 K) 1,4 K (1,0 K)
Mittelwert	3,0 K (1,7 K)	1,8 K (1,2 K)	2,0 K (1,0 K)	1,7 K (0,9 K)

#### 7.1.4. Charakterisierung der räumlichen Temperaturvariabilität

Das System der akustischen Laufzeittomographie wurde in der Atmosphären-Simulationskammer SAPHIR eingesetzt, um Aussagen über die Temperaturstruktur innerhalb des Messvolumens zu treffen. Ein Vorteil dieser Methode gegenüber Punktmessungen ist die Bereitstellung von Informationen innerhalb einer räumlich ausgedehnten Fläche. Weiterhin erlaubt die Methodik eine Temperaturmessung ohne durch Strahlungseinflüsse direkt beeinflusst zu werden.

Die Untersuchungen der Temperaturverteilung innerhalb einer vertikalen Messfläche mit einer Ausdehnung von 3,3 m × 3,3 m haben gezeigt, dass sich während der Messperiode bei direkter solarer Einstrahlung lokale Temperaturunterschiede von bis zu 3,6 K ausbilden können. Wird das Messvolumen durch ein Jalousiensystem beschattet, sind die maximalen Unterschiede der akustisch virtuellen Temperatur innerhalb der Messfläche deutlich geringer und betragen maximal 1,8 K. Vergleichbar geringe Werte der Flächendifferenzen treten nachts auf, dann jedoch unabhängig von dem Beschattungszustand des Messvolumens. Eine Abschätzung der Unsicherheiten bei der Temperaturbestimmung aus akustischen Laufzeitmessungen ergab für eine Einzelmessung Werte im Bereich von 0,5 K und liegt somit deutlich unter den detektierten Unterschieden der Temperaturdifferenzen.

Die Temperaturunterschiede übersteigen wenige Kelvin während des gesamten Messzeitraumes nicht. Hinsichtlich der Temperaturabhängigkeit von chemischen Reaktionskonstanten kann die Temperaturverteilung in SAPHIR daher als (chemisch) homogen bezeichnet werden.

## 7.2. Ilmenauer Fass

Das Ilmenauer Fass ist ein wissenschaftliches Großgerät der Technischen Universität Ilmenau, Fachgebiet für Thermo- und Magnetofluidynamik, zur Untersuchung thermisch induzierter Konvektion bei hohen Rayleigh-Zahlen (Resagk et al., 2002).

Temperaturdifferenzen in einem Medium bewirken Bewegung und Transportvorgänge. Eine hinreichend starke Erwärmung der Unterseite des Mediums verursacht dabei eine Vertikalbewegung innerhalb des Mediums. Entsprechende Beispiele lassen sich in der Natur in unterschiedlichen Bereichen, wie Meteorologie, Geophysik oder Astronomie, finden.

Ein experimenteller Versuchsaufbau zur Beschreibung derartiger thermisch induzierter Vertikalbewegungen wird nach dem Franzosen Henri Bénard (1874-1939) und dem Briten Lord Rayleigh (John William Strutt, 1842-1919) als Rayleigh-Bénard-Zelle (RB-Zelle) bezeichnet (s. Chandrasekhar, 1981). Der Aufbau besteht aus einem abgeschlossenen Volumen (RB-Zelle), das mit einem Arbeitsmedium gefüllt ist, welches von unten geheizt und von oben gekühlt wird. In Abhängigkeit von den thermischen Unterschieden zwischen Ober- und Unterseite bilden sich unter dem Einfluss der Gravitationskraft charakteristische Strukturen in der Zelle aus.

Die Beschreibung eines Rayleigh-Bénard-Experimentes kann anhand von drei dimensionslosen Kennzahlen erfolgen. Das Aspektverhältnis  $\Gamma_{\text{RB}}$  gibt das Verhältnis zwischen Durchmesser  $D$  und Höhe  $H$  der im Allgemeinen zylinderförmigen Rayleigh-Bénard-Zelle an

$$\Gamma_{\text{RB}} = \frac{D}{H}. \quad (7.3)$$

Die Prandtl-Zahl  $P_r$  ist eine Materialgröße und charakterisiert das Arbeitsmedium in der Zelle. Sie wird aus dem Quotienten der kinematischen Viskosität  $\nu$  des Mediums und dessen thermischer Diffusivität  $\kappa$  bestimmt

$$P_r = \frac{\nu}{\kappa}. \quad (7.4)$$

Zur Beschreibung der Stärke des Antriebes der thermischen Konvektion dient die Rayleigh-Zahl  $Ra$

$$Ra = \frac{\alpha g H^3 \Delta T}{\kappa \nu}. \quad (7.5)$$

Neben den Stoffeigenschaften des Arbeitsmediums, seinem thermischen Ausdehnungskoeffizienten  $\alpha$  und der räumlichen Ausdehnung der Konvektionszelle, berücksichtigt sie den Temperaturunterschied zwischen Kühl- und Heizplatte  $\Delta T$  sowie die Schwerebeschleunigung  $g$ .

Das Ilmenauer Fass stellt ein solches Rayleigh-Bénard-Experiment dar. Kern der Anlage ist eine zylindrische Experimentalkammer mit einem Durchmesser von 7,15 m und einer



maximalen Höhe von 6,30 m. Das Arbeitsmedium in der Konvektionszelle ist Luft. Diese wird innerhalb des Zylinders mittels einer elektrischen Heizplatte von unten geheizt. Die obere Begrenzung der Kammer bildet eine variabel aufgehängte, wassergekühlte Platte, die mit einer Krananlage angehoben oder abgesenkt werden kann (Abbildung 57), so dass verschiedene Aspektverhältnisse einstellbar sind. Eine ausführliche Beschreibung zum Aufbau des Ilmenauer Fasses geben du Puits et al. (2007b).

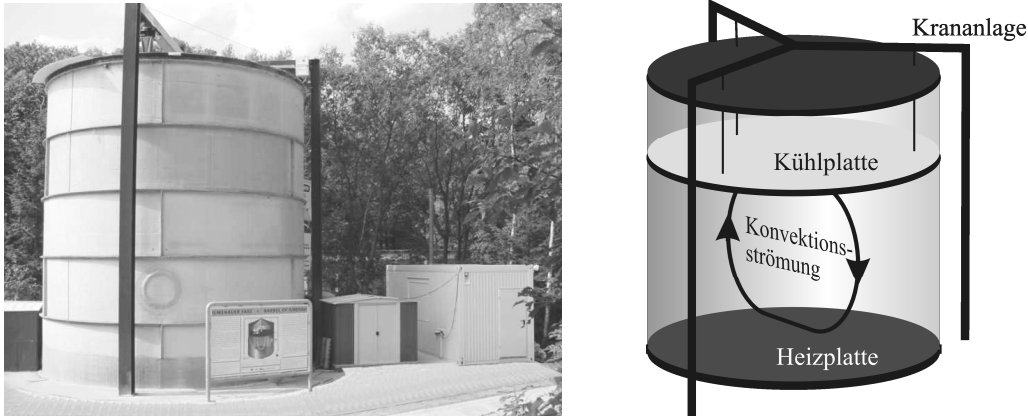


Abbildung 57: Ilmenauer Fass – ein Experimentalaufbau der TU Ilmenau zur Untersuchung konvektiver Phänomene bei hohen Rayleigh-Zahlen. Links: Außenansicht. Rechts: Schematische Darstellung zur Funktionsweise des Ilmenauer Fasses. Durch Heizung von der Unterseite eines definierten Volumens und Kühlung an der Oberseite bildet sich eine Konvektionsströmung im Volumen aus. Durch die freie Beweglichkeit der Kühlplatte in vertikaler Richtung mit Hilfe einer Krananlage ist eine flexible Anpassung des Verhältnisses zwischen Durchmesser (7,15 m) und Höhe des Experimentalaufbaus möglich.

### 7.2.1. Hintergrund der Messung

Die Beschreibung der konvektiven Vorgänge in einer Rayleigh-Bénard-Zelle erfolgt anhand der Parameter Strömung und Temperatur. Die Detektion dieser Größen erfolgt im Ilmenauer Fass mit verschiedenen Methoden.

Zur Erfassung der Strömungseigenschaften innerhalb der RB-Zelle werden optische Verfahren eingesetzt (Resagk et al., 2005; du Puits et al., 2007a), welche als Fernerkundungsverfahren das Strömungsfeld selbst nicht oder nur minimal beeinflussen. Mittels Laser-Doppler-Anemometrie (LDA) können die Komponenten des Strömungsfeldes an einem definierten Punkt (kleines Messvolumen im Millimeterbereich) mit hoher zeitlicher Auflösung bestimmt werden. Dieses optische Verfahren beruht auf der Aussendung monochromatischen Lichts mittels Laser, welches per Strahlteiler geteilt und anschließend in einem Punkt im Messgebiet zum Schnitt gebracht und fokussiert wird. Durch die Überlagerung der beiden monochromatischen und kohärenten Lichtwellen entsteht ein Interferenzstreifenmuster. Durchquert ein Streupartikel, welches mit der Strömung mitbewegt wird, dieses Streifenmuster, oszilliert das von ihm gestreute Licht entsprechend seiner Geschwindigkeit zwischen hell und dunkel. Diese Helligkeitsschwankungen werden von einer Photodiode

detektiert und aus der Frequenz der Fluktuationen wird die Geschwindigkeit des Streupartikels und somit die Fluidgeschwindigkeit bestimmt (Durst et al., 1981).

Soll das Strömungsfeld im Ilmenauer Fass nicht ausschließlich an einem Ort untersucht werden, sondern in einem ausgedehnten Raumbereich, findet die Particle-Imaging-Velocimetrie (PIV) Anwendung. Bei diesem Verfahren wird Laserlicht in einer Raumrichtung derart aufgeweitet, dass eine Fläche innerhalb des Messvolumens beschienen wird (Lichtschneitebene). Partikel, welche sich in dieser Ebene bewegen, werden mittels photographischer Aufnahmen festgehalten. Die Wegstrecke, welche das Partikel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Belichtungen zurückgelegt hat, ist dabei ein Maß für die Geschwindigkeit der Strömung. Die Analyse der Trajektorien verschiedener Partikel lässt Rückschlüsse auf die Bewegungsmuster in der Lichtschneitebene im betrachteten Zeitbereich zu (Schröter und Wolff, 1997). Werden zwei Kameras eingesetzt, welche unter verschiedenen Winkeln auf die Lichtschneitebene ausgerichtet sind, können dreidimensionale Strömungsvektoren abgeleitet werden (Resagk et al., 2005).

Vorteil beider Verfahren ist die hohe zeitliche Auflösung, mit der die Strömung detektiert werden kann. Es lassen sich so zeitliche Schwankungen der Strömung mit geringer Periodenlänge untersuchen. Ein weiterer Vorteil ist die bereits genannte räumliche Trennung zwischen Messtechnik und Messgebiet, wodurch eine Störung der Strömung vermieden wird. Nachteil der genannten Messtechniken ist, dass bei beiden Verfahren Tracerpartikel zur Strömungsmessung nötig sind, welche das Licht reflektieren und es wird vorausgesetzt, dass die Partikel der Strömung uneingeschränkt folgen.

Zur Bestimmung der Temperatur im Ilmenauer Fass werden Mikrothermistoren eingesetzt, welche die Temperatur an einem Punkt mit hoher zeitlicher Auflösung (200 Hz) erfassen. Der Durchmesser eines Sensors beträgt  $140\ \mu\text{m}$  und die Genauigkeit bei der Temperaturmessung wird nach Kalibration mit unter  $\pm 0,1\ \text{K}$  angegeben. Vorrangiges Einsatzgebiet des Messfühlers ist die Untersuchung der Wandgrenzschichten (bis ca.  $0,15\ \text{m}$  Wandabstand). Hierfür wird der Sensor an einer Haltekonstruktion ins Messgebiet eingebracht, welche den Einfluss der Messtechnik auf die Parameter am Messort klein halten soll. Um die Temperatur in verschiedenen Abständen von der Wand zu messen, wird die Lage des Sensors entsprechend verändert. Die minimal mögliche Schrittweite bei einer Profilmessung beträgt  $10\ \mu\text{m}$  (du Puits et al., 2007b).

Bisher ist jedoch kein Messverfahren bekannt, welches zur gleichen Zeit und mit gleicher räumlicher Auflösung die Verteilungen von Temperatur und Strömung in einem Untersuchungsgebiet erfassen kann. Dies leistet das vorgestellte System der akustischen Laufzeit-tomographie. Aufgrund thermischer Unterschiede zwischen oberer und unterer Begrenzungsfläche bilden sich in der Konvektionszelle Ilmenauer Fass Strömungsmuster aus, welche das gesamte Zellenvolumen beeinflussen. Diese sollten mit dem akustischen System in ihrer räumlichen Struktur erfasst werden. Gleichzeitig sollte die Temperaturverteilung mit gleicher räumlicher Auflösung bestimmt werden. Das Ilmenauer Fass eignete sich für die Anwendung des akustisch tomographischen Systems zur zeitgleichen Erfassung von Temperatur und Strömung bei gleicher räumlicher Auflösung besonders. Es zeichnet

sich unter anderem dadurch aus, dass die Randbedingungen einer Messung, wie die Temperierung von Heiz- und Kühlplatte oder die Höhe der Konvektionszelle und damit das Aspektverhältnis, genau eingestellt werden können. Die Abkopplung des Messvolumens von der Umwelt erlaubt störungsfreie Bedingungen während der Messungen und die räumliche Ausdehnung des Kammerinneren ermöglichte ein ungehindertes Einbringen von Messtechnik.

Des Weiteren konnte ausgenutzt werden, dass Informationen über die konvektiven Strukturen innerhalb des Fasses bei bestimmten Aspektverhältnissen durch frühere Messungen bekannt waren. Während des Experimentes betrug die Höhe der Konvektionszelle 5,3 m, womit sich ein Wert von  $\Gamma_{RB} = 1,3$  ergab. Für ein solches Aspektverhältnis wurde die Herausbildung einer einzelnen großen Konvektionswalze in einer vertikalen, nahezu unveränderlichen Hauptströmungsebene erwartet (Resagk et al., 2004; du Puits et al., 2007a). Dieses Wissen wurde genutzt, um die Sender und Empfänger des tomographischen Systems vertikal so anzuordnen, dass die Hauptströmungsebene hinsichtlich Temperatur- und Strömungseigenschaften untersucht werden konnte.

### 7.2.2. Messtechnik

Zur Erfassung von Temperatur und konvektiver Strömung im Ilmenauer Fass wurden insgesamt 8 Schallsender und 8 Empfänger verwendet. Da eine Anbringung der Sensoren an der Decke und am Boden nicht möglich war, wurden alle Lautsprecher und Mikrophone vertikal an gegenüberliegenden Wänden im Innern des Großgerätes angebracht (Abbildung 58). Als Schallsignale wurden vier verschiedene Maximallängenfolgen (s. Kapitel 3.3.3) vom Grad 15 verwendet. Dies entspricht einer Signaldauer von je 0,6 s. Ein Schallsignal wurde von jeweils zwei gegenüberliegenden Schallsendern (R1 und R5, R2 und R6, usw., vgl. Abbildung 58, rechts) ausgesendet. Die Auswahl der Positionen erfolgte zum einen im Hinblick auf die Unterscheidbarkeit gleicher Signale durch Laufwegunterschiede der Schallsignale, zum anderen hinsichtlich der Möglichkeit, die beiden Einflussgrößen Strömungsgeschwindigkeit und Temperatur auf die Schallgeschwindigkeit unter Ausnutzung bidirektionaler Schallausbreitung zu trennen. Für die Trennung wurden parallele Streckenpaare mit einem räumlichen Abstand von 0,4 m vorgesehen. Für die tomographische Rekonstruktion der Verteilungen standen somit Informationen entlang 56 Schallstrahlverläufen zur Verfügung.

Die Messtechnik zur Ansteuerung der Schallsender und zur Datenaufzeichnung wurde im Raum oberhalb der Kühlplatte untergebracht. Die akustische Messfläche hatte eine Ausdehnung von 7 m Breite und 4 m Höhe. Sie befand sich 0,4 m oberhalb der Heiz- und 0,9 m unterhalb der Kühlplatte. Die horizontale Ausdehnung des Untersuchungsgebietes deckte nahezu den Durchmesser des Ilmenauer Fasses ab. Für die Rekonstruktion der Verteilungen wurde das Untersuchungsgebiet in Gitterzellen mit einer Größe von  $0,8 \text{ m} \times 0,8 \text{ m}$  unterteilt.

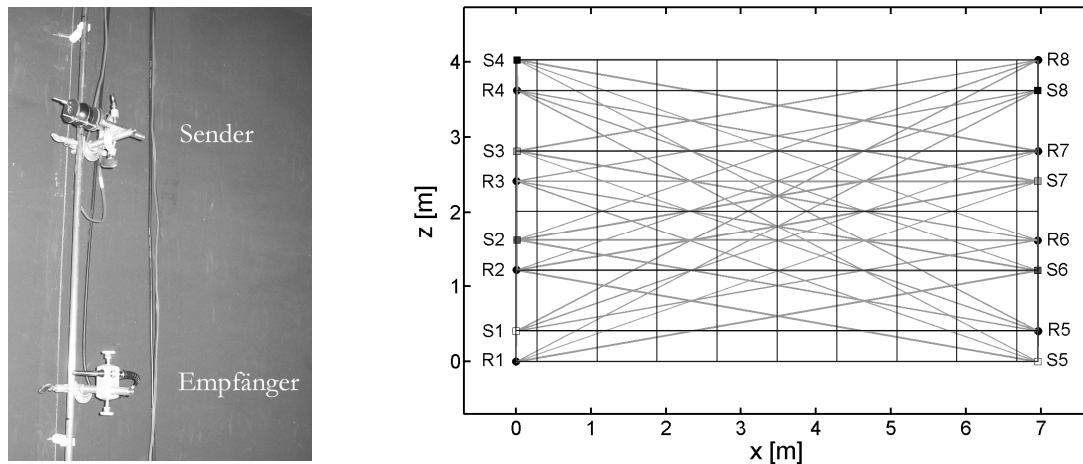


Abbildung 58: Beispiele für Schallsender und Empfänger im Ilmenauer Fass (links) sowie der schematische Aufbau aller 8 Sender S1...S8 (Quadrate) und 8 Empfänger R1...R8 (Kreise) an den Seitenwänden innerhalb der Konvektionskammer im Ilmenauer Fass (rechts). Graue Linien kennzeichnen die Schallstrahlverläufe durch die vertikale Messebene. Schwarze Linien entsprechen den festgelegten Gitterzellen ( $0,8\text{ m} \times 0,8\text{ m}$ ) für die tomographische Rekonstruktion der meteorologischen Felder.

Der Aufbau der Messtechnik im Ilmenauer Fass erfolgte bei einer Temperatur von Kühl- und Heizplatte von jeweils  $25^\circ\text{C}$ . Nach dem Aufbau wurde die Heizplatte auf  $60^\circ\text{C}$  erwärmt und die Kühlplatte auf  $20^\circ\text{C}$  abgekühlt. Diese Temperaturwerte wurden während der akustisch tomographischen Messungen konstant gehalten. Die Messungen zur Untersuchung der Strömungs- und Temperaturfelder bei voll ausgeprägter Turbulenz begannen 59 Stunden, nachdem Kühl- und Heizplatte ihre Arbeitstemperaturen erreicht und sich stationäre Bedingungen in der RB-Zelle eingestellt hatten.

Die Temperaturdifferenz zwischen Kühl- und Heizplatte betrug während der Messungen  $40\text{ K}$ , die arithmetische Mitteltemperatur  $40^\circ\text{C}$ . Mit der dynamischen Viskosität  $\eta$  bei  $40^\circ\text{C}$  nach Kadoya et al. (1985) und der Luftdichte  $\rho$  bei dieser Temperatur und Standarddruck ( $1013\text{ hPa}$ ) ergibt sich für die Versuchsbedingungen eine kinematische Viskosität

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (7.6)$$

von  $\nu = 1,7 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2\text{ s}^{-1}$ . Die thermische Diffusivität  $\kappa$  lässt sich aus der Luftdichte  $\rho$ , der Wärmeleitfähigkeit  $\Lambda$  (nach Kadoya et al., 1985) und der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck  $c_p$  berechnen zu

$$\kappa = \frac{\Lambda}{\rho \cdot c_p}. \quad (7.7)$$

Bei den vorherrschenden Bedingungen ergibt sich ein Wert von  $\kappa = 2,4 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2\text{ s}^{-1}$ . Nach Gleichung (7.4) kann nun die Prandtl-Zahl bestimmt werden. Sie beträgt  $P_r = 0,71$ .

Unter Verwendung der Schwerebeschleunigung  $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$  und des kubischen Ausdehnungskoeffizienten  $\alpha = 3,19 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$  bei  $40^\circ\text{C}$  beträgt die Rayleigh-Zahl nach Gleichung (7.5)  $Ra = 4,6 \cdot 10^{11}$ . Das Aspektverhältnis der RB-Zelle ergibt sich aus der Höhe der Zelle  $H = 5,3 \text{ m}$  und ihrem Durchmesser  $D = 7,15 \text{ m}$  entsprechend Gleichung (7.3) zu  $\Gamma = 1,3$ .

### 7.2.3. Strömungsrekonstruktion: Simulationsergebnisse

Die Anordnung der Schallsender und Empfänger konnte im Ilmenauer Fass nur an den Seitenwänden erfolgen. Hieraus ergab sich eine Überdeckung des Messgebietes mit Schallstrecken, die insbesondere im Hinblick auf die richtungsabhängige Rekonstruktion des Strömungsfeldes nicht optimal war. In einigen Bereichen des Messfeldes, insbesondere zentral an der oberen und unteren Grenze der Messfläche, konnten keine vertikalen Strömungsinformationen erfasst werden. Um den Effekt der Anordnung der Sender und Empfänger auf das rekonstruierte Strömungsfeld abzuschätzen, wurde ein wirbelförmiges Strömungsfeld mit einer räumlichen Auflösung von  $0,05 \text{ m} \times 0,05 \text{ m}$  entsprechend der Ausführungen in Kapitel 5.1.3 simuliert. Die Stärke des Wirbelfeldes wurde mit  $\Gamma = -5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  gewählt und das Wirbelzentrum in das Zentrum der Messfläche  $\mathbf{r}_0 = (x_0, z_0) = (3,5 \text{ m}, 2 \text{ m})$  gelegt. Die Simulation des Wirbelfeldes erfolgte für die gesamte Konvektionszelle ( $7,15 \text{ m} \times 5,3 \text{ m}$ ).

Entsprechend der akustisch tomographischen Messanordnung im Ilmenauer Fass wurden die simulierten Geschwindigkeitsdaten in Strömungsgeschwindigkeiten entlang der Schallwege umgerechnet. Die Rekonstruktion der Strömungsverteilung erfolgte unter Anwendung einer schwachen Kopplung zwischen den Gitterzellenwerten (Wichtungsfaktor: 0,01; vgl. 5.1.3) bzw. ohne Mittelung benachbarter Gitterzellenwerte. Zur Untersuchung der Übereinstimmung von simuliertem und rekonstruiertem Feld wurden die euklidischen Abstände der Zellenwerte zwischen vorgegebener und rekonstruierter Verteilung der Strömungskomponenten nach Gleichung (5.20) und (5.21) für jeden Iterationsschritt berechnet (Abbildung 59).

Für eine geringe Anzahl Iterationen ( $< 10$ ) unterscheiden sich die euklidischen Abstände mit und ohne Mittelung kaum. Werden weitere Iterationen durchgeführt, steigen die Differenzen zwischen vorgegebener Verteilung und Rekonstruktionsergebnis ohne Mittelung rasch an. Minimale euklidische Abstände werden ohne Mittelung nach 3 bis 8 Iterationsschritten erreicht, wobei die Differenzwerte der  $y$ -Komponente des Strömungsfeldes bereits nach 3 Iterationsschritten wieder anzusteigen beginnt während die  $z$ -Komponente erst nach 7 Iterationen ihr Minimum erreicht.

Die Rekonstruktion der Beispielveilung mit schwacher Kopplung zwischen benachbarten Gitterzellenwerten bewirkt, dass die euklidischen Abstände für eine steigende Anzahl von Iterationsschritten (bis etwa 300 Iterationen) weiter sinken, bis ein Grenzwert erreicht wird. Dieser liegt unterhalb des Minimums der euklidischen Abstände des Rekonstruktionsergebnisses ohne Mittelung. Unter Berücksichtigung dieser Betrachtungen erfolgte die

tomographische Rekonstruktion des Strömungsfeldes aus den simulierten Strahlgeschwindigkeiten mit einer schwachen Kopplung zwischen den Zellen (Wichtungsfaktor 0,01) und einem Abbruch des iterativen Prozesses nach 300 Iterationsschritten.

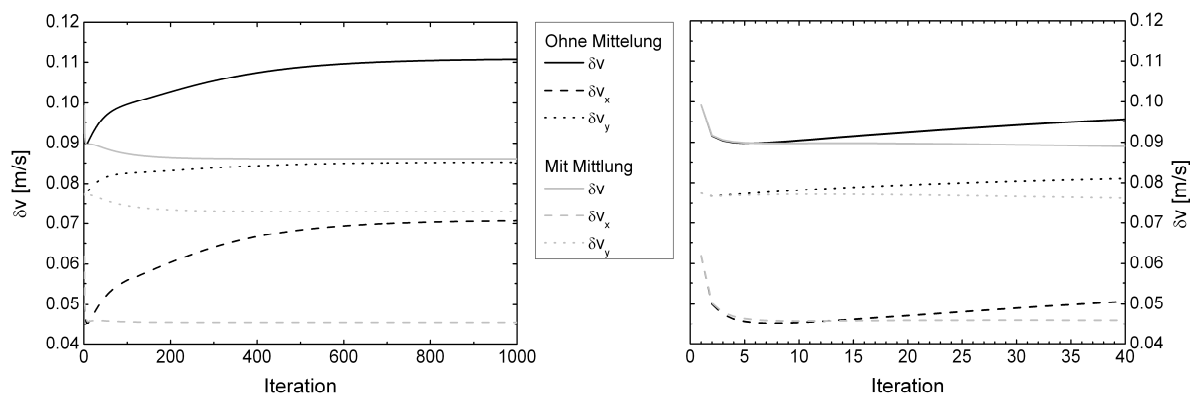


Abbildung 59: Abhängigkeit der Differenzen  $\delta v$  zwischen dem vorgegebenen (simulierten) Strömungsfeld und der rekonstruierten Verteilung von der Anzahl der Iterationen und der Art der Mittelung. Die Angabe „mit Mittelung“ im Diagramm entspricht einer schwachen Kopplung benachbarter Gitterzellenwerte (Wichtungsfaktor 0,01). Die Differenzen  $\delta v_x$  und  $\delta v_z$  wurden für die Strömungskomponenten  $v_x$  und  $v_z$  berechnet. Die Differenz für den Betrag innerhalb des Gitters wurde aus diesen Werten nach  $\delta v = (\delta v_x^2 + \delta v_z^2)^{1/2}$  bestimmt. Die rechte Darstellung entspricht einem Ausschnitt aus der linken Abbildung für wenige Iterationsschritte.

Zum Vergleich der simulierten Verteilung mit dem rekonstruierten Strömungsfeld (Abbildung 60), wurde das simulierte Feld auf Tomographiegittergröße gemittelt. Es ist erkennbar, dass mit der rekonstruierten Strömungsverteilung die grobe Struktur des simulierten Feldes wiedergegeben wird. Die höheren Geschwindigkeiten im zentralen Bereich des Feldes wurden detektiert, ebenso stimmt die Rotationsrichtung des Wirbels überein. Strömungsgeschwindigkeiten und -richtung unterscheiden sich jedoch in einigen Zellen erheblich voneinander.

Während die Strömung des simulierten Feldes kreisförmig um den Mittelpunkt verläuft, ist die rekonstruierte Strömungsverteilung in vertikaler Richtung stark abgeflacht. Hieraus ergeben sich für die zentralen Gitterzellen Richtungsunterschiede der Strömung von zum Teil  $45^\circ$ . Ursache sind die fehlenden Informationen entlang der vertikalen Achse im zentralen Bereich der Messfläche, welche durch die Anordnung der Sender und Empfänger ausschließlich an den Seitenwänden des Ilmenauer Fasses verursacht wird. Die deutliche Abweichung der Strömungsgeschwindigkeiten im zentralen Bereich kann ebenfalls auf diesen Mangel an Strömungsinformationen zurückgeführt werden.

Die Auswirkungen des Versuchsaufbaus auf das rekonstruierte Strömungsfeld, welche durch die Simulation gezeigt werden konnten, muss bei der Interpretation der Messergebnisse berücksichtigt werden.

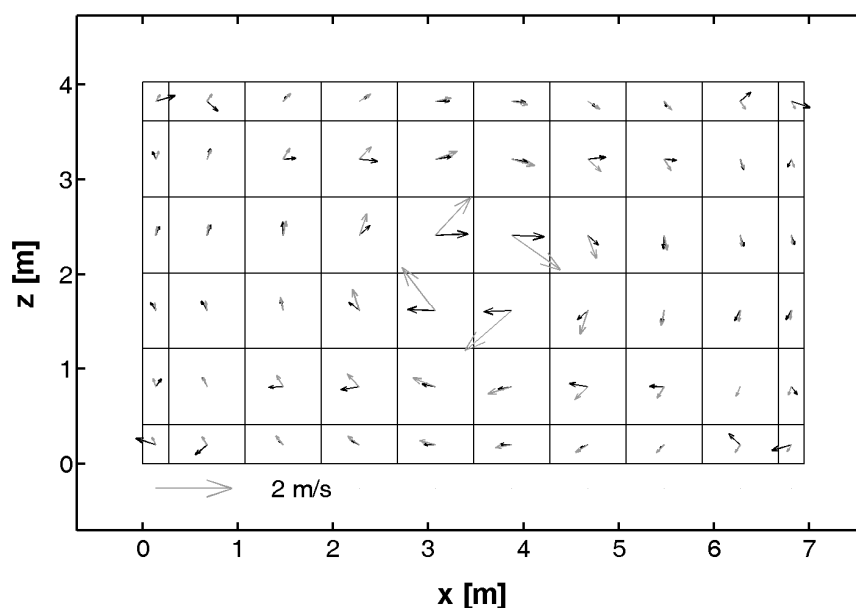


Abbildung 60: Vergleich zwischen simuliertem Wirbelfeld (graue Pfeile) und tomographisch rekonstruiertem Strömungsfeld (schwarze Pfeile). Das simulierte Feld wurde auf die Größe der tomographischen Gitterzellen gemittelt.

#### 7.2.4. Ergebnisse der Messung – Temperatur- und Strömungsverteilung

Die akustischen Messungen erfolgten bei voll ausgeprägter Turbulenz. Der zeitliche Abstand zwischen zwei Einzelmessungen betrug 20 Sekunden. Die Rekonstruktion der Verteilungen erfolgte bezüglich einer Anfangsmessung unter homogenen Bedingungen (keine Temperaturgradienten, ruhendes Medium). Auf diese Weise konnte der Einfluss system- und aufbauspezifischer Parameter auf die berechnete Schallgeschwindigkeit entlang der einzelnen Strecken eliminiert werden.

Die Trennung von Temperatur und Strömungsgeschwindigkeit erfolgte durch Addition bzw. Subtraktion der effektiven Schallgeschwindigkeiten entlang paralleler Streckenpaare (vgl. Kapitel 5.1.1), deren Abstand zueinander mit 0,4 m im Vergleich zur Ausdehnung des Messgebietes gering war. Die resultierenden temperaturabhängigen Schall- bzw. Strömungsgeschwindigkeiten wurden nach ihrer Trennung den beiden Strecken wieder zugeordnet. Die tomographische Rekonstruktion der Verteilungen von Temperatur und Wind erfolgte im Anschluss separat.

Die Rekonstruktion der Temperaturverteilung wurde nach 25 Iterationsschritten abgebrochen. Es erfolgte eine Kopplung benachbarter Gitterzellen mit einem Wichtungsfaktor von 0,10 für alle Zellen (vgl. 5.1.2). Die Rekonstruktion des Strömungsfeldes erfolgte entsprechend der Betrachtungen in Kapitel 7.2.3 mit schwacher Kopplung benachbarter Zellen (Wichtungsfaktor: 0,01). Dieser iterative Prozess wurde nach 300 Iterationen abgebrochen. Als Beispiel für das Ergebnis der Rekonstruktionen sind in Abbildung 61 zwei Tomogramme von aufeinanderfolgenden Messzeiten dargestellt. Die Vektorpfeile verdeutlichen die

Strömungsgeschwindigkeit und -richtung in der vertikalen Messebene, die Grauskalierung der Gitterzellen zeigt die Verteilung der akustisch virtuellen Temperatur zur Messzeit.

Die Temperaturverteilung ist innerhalb der Messfläche nahezu homogen. Die Mitteltemperatur in der Verteilung von 11:34:00 beträgt  $40,9^{\circ}\text{C}$ . Das Temperaturmaximum liegt bei  $42,8^{\circ}\text{C}$ , das Minimum bei  $40,3^{\circ}\text{C}$ . Bei der darauf folgenden Messung (nach 20 Sekunden) beträgt der Mittelwert der Temperatur  $40,2^{\circ}\text{C}$ , das Maximum  $41,0^{\circ}\text{C}$  und das Minimum  $39,1^{\circ}\text{C}$ . Bereiche höherer Temperatur treten vorrangig in den Gebieten auf, in denen die Strömung aufwärts gerichtet ist bzw. an der unteren Begrenzung der Messfläche, welche sich am nächsten an der Heizplatte befindet (11:34:00). Niedrige Temperaturen innerhalb der Messfläche sind insbesondere im Bereich der abwärts gerichteten Strömung, am rechten Rand der Messfläche, zu finden (11:34:20).

Im rekonstruierten Strömungsfeld ist zu beiden Zeiten ein ähnliches Strömungsmuster, bestehend aus einem einzelnen Wirbel, der im Uhrzeigersinn rotiert, zu erkennen. Die mittlere Geschwindigkeit beträgt zu beiden Zeitpunkten  $0,3\text{ m s}^{-1}$ . Maximale Geschwindigkeiten von bis zu  $0,6\text{ m s}^{-1}$  werden in den Randbereichen, insbesondere an den Seitenwänden und an der unteren Messflächengrenze, erreicht. Im zentralen Bereich sind die Geschwindigkeiten deutlich geringer. Das Medium befindet sich hier nahezu in Ruhe. Ein offensichtlicher Unterschied zwischen den beiden Momentaufnahmen hinsichtlich des Strömungsfeldes besteht in der räumlichen Verlagerung des Wirbelzentrums, dem Gebiet mit minimaler Strömungsgeschwindigkeit.

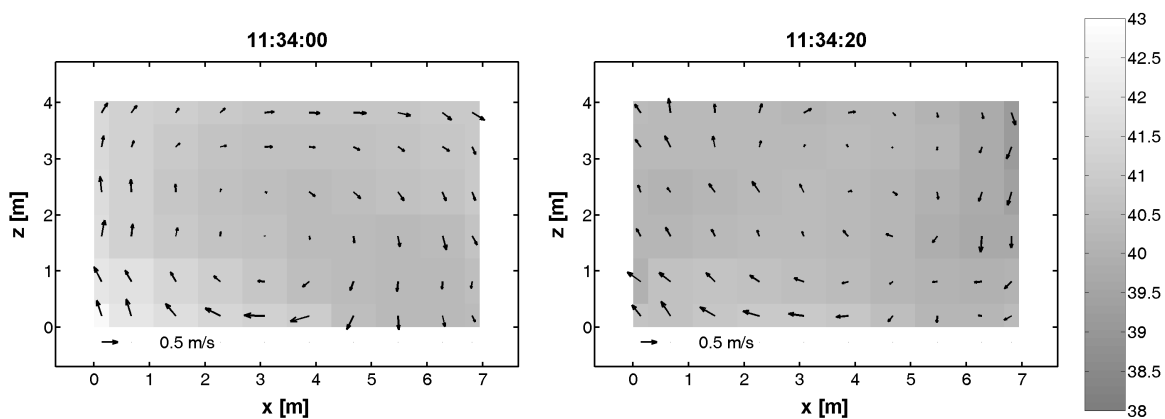


Abbildung 61: Aus Laufzeitmessungen akustischer Signale rekonstruierte Verteilungen von akustisch virtueller Temperatur (Grauskala in  $^{\circ}\text{C}$ ) und Strömungsverhältnissen (Pfeile) innerhalb der Messfläche im Ilmenauer Fass zu zwei aufeinanderfolgenden Messzeitpunkten.

In den Beispieltomogrammen in Abbildung 61 fällt bezüglich der Strömungsverteilung weiterhin auf, dass entlang der oberen und unteren Begrenzung des tomographischen Feldes, insbesondere im zentralen Bereich, lediglich Strömungskomponenten in horizontaler Richtung rekonstruiert werden. In Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Rekonstruktion des simulierten Wirbelfeldes (Kapitel 7.2.3) ist die Ursache hierfür in der Anordnung der Schallsender und Empfänger zu finden, welche nur an den Seitenwänden des Ilme-



nauer Fasses angebracht werden konnten. Durch das Fehlen vertikaler Schallstrecken, insbesondere im zentralen Bereich, können keine vertikalen Strömungskomponenten in diesem Bereich rekonstruiert werden.

Zur Repräsentation des zeitlichen Verlaufs von akustisch virtueller Temperatur und Strömungsgeschwindigkeit sind in Abbildung 62 die Flächenmittelwerte von Temperatur (rechts) bzw. Strömungsgeschwindigkeit (links) aller Einzelmessungen an einem Tag (8:45:20 bis 23:59:40) dargestellt. Die Reihen umfassen jeweils die Werte aller 2744 Einzelmessungen in diesem Zeitbereich (Gesamtdauer: 15 Stunden, 14 Minuten und 20 Sekunden). Zur Beschreibung der Variabilität der Größen innerhalb der Messfläche wurde zusätzlich das 99% Vertrauensintervall (Standardabweichung  $\cdot 2,58$ ) eingezeichnet. Während der betrachteten Messzeit lagen die mittleren Temperaturen zwischen  $40,1^{\circ}\text{C}$  und  $41,1^{\circ}\text{C}$ . Die Schwankungsbreite der Temperaturwerte in der Messfläche (99% Vertrauensintervall) beträgt bis zu  $\pm 2,2\text{ K}$  und liegt im Bereich zwischen  $38,5^{\circ}\text{C}$  und  $43,0^{\circ}\text{C}$ . Die Strömungsgeschwindigkeiten im Ilmenauer Fass innerhalb der akustischen Messfläche betragen während thermisch induzierter Konvektion im Mittel  $0,3\text{ m s}^{-1}$  und erreichten in Einzelfällen Werte bis  $1,2\text{ m s}^{-1}$ .

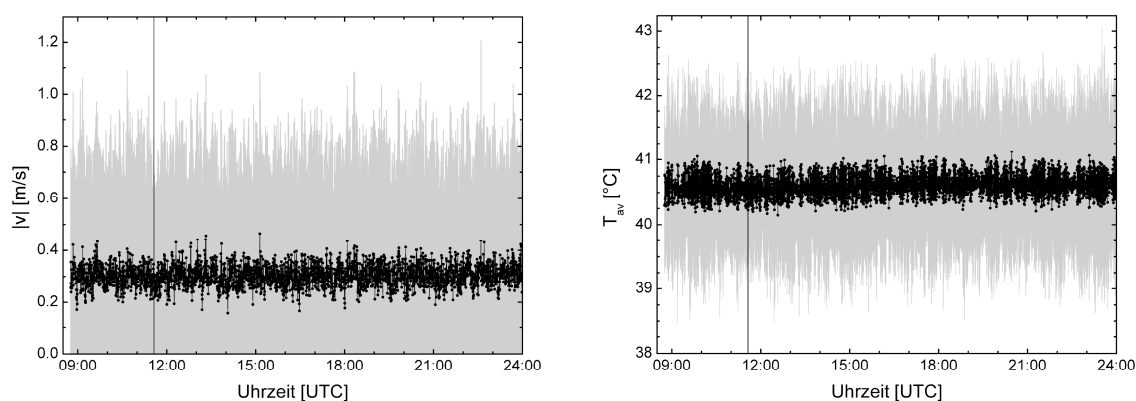


Abbildung 62: Tomographisch bestimmter Verlauf der Strömungsgeschwindigkeiten (links) und der Temperatur (rechts). Dargestellt sind der Flächenmittelwert der rekonstruierten Werte in den Tomographiezellen (schwarz) sowie der 99% Vertrauensbereich (grau) für jede Einzelmessung im gezeigten Zeitbereich. Die durchgezogene vertikale Linie kennzeichnet den Zeitpunkt, zu welchem die Verteilungen aus Abbildung 61 (11:34) detektiert wurden.

Zur Untersuchung der räumlichen Struktur der Felder wurden die zeitlichen Mittelwerte  $\bar{x}$  innerhalb der Gitterzellen und deren räumliche Struktur analysiert. Als Ausgangsgrößen dienten die rekonstruierten Verteilungen von Temperatur und Strömung ( $u$ - und  $w$ -Komponente). Die Mittelwerte wurde für jede Zelle aus allen  $n = 2744$  Einzelwerten innerhalb der jeweiligen Gitterzelle,  $x_i$ , berechnet und entsprechen somit mittleren Gitterzellenwerten (über einen Zeitraum von 15h 14min 20s) mit

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i . \quad (7.8)$$

Die Charakterisierung der Schwankungsbreite der Werte innerhalb der jeweiligen Gitterzelle im betrachteten Zeitbereich erfolgt durch Angabe der Standardabweichung  $\sigma_x$  mit

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} . \quad (7.9)$$

In den folgenden Abbildungen sind jeweils auf der linken Seite die mittleren Größen ( $T_{av}$ ,  $u$ ,  $w$ ) sowie deren Standardabweichungen auf der rechten Seite für den genannten Zeitbereich dargestellt. Die Positionen  $(x_{RB}, z_{RB})$ , die in den Diagrammen angegeben sind, beziehen sich auf die Gesamtausdehnung der Rayleigh-Bénard-Zelle während der Untersuchungen. Der Mittelpunkt der RB-Zelle liegt bei den Koordinaten  $(x_{RB}, z_{RB}) = (3,6 \text{ m}, 2,7 \text{ m})$ . Die Zuordnung der tomographisch rekonstruierten Gitterzellenwerte zu Positionswerten entspricht der Lage des jeweiligen Gitterzellenmittelpunktes innerhalb der RB-Zelle. Jeder Punkt in den Abbildungen entspricht folglich dem Wert innerhalb einer Tomographiegitterzelle innerhalb der Messfläche. Neben den absoluten Positionen sind für die horizontale Richtung ebenfalls relative Positionen bezüglich der zentralen Achse der RB-Zelle dargestellt ( $x_{RB}/D - 0,5 = -0,5 \dots 0,5$ ).

Zunächst soll die Temperaturvariation innerhalb der RB-Zelle näher betrachtet werden (Abbildung 63). Die Temperaturmittelwerte zeigen deutliche Unterschiede zwischen dem linken Zellenrand ( $x_{RB} = 0 \text{ m}$ ) mit höheren Temperaturen und dem rechten Rand mit geringeren Werten. Maximale Temperaturen sind im unteren linken Bereich der tomographischen Messfläche zu finden. Dies entspricht den Aussagen, die bereits anhand der Beispieldtomogramme in Abbildung 61 getroffen werden konnten. Die Unterschiede der Temperaturmittelwerte am linken Messfeldrand betragen insgesamt 0,9 K. Die geringsten Temperaturen werden nahezu unabhängig von der vertikalen Lage der Gitterzelle am rechten Messfeldrand erreicht. Die Unterschiede zwischen den Zellenmittelwerten betragen hier lediglich etwa 0,2 K.

Die horizontalen Verläufe der Temperaturmittelwerte in jeweils einer Höhe unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Gradienten im zentralen Bereich der RB-Zelle sowie den Temperaturverläufen in der Nähe der seitlichen Begrenzungsflächen. Die untersten Zellen weisen den stärksten negativen horizontalen Gradienten im zentralen Bereich (Temperaturabnahme von links nach rechts) auf, welcher sich nahezu über den gesamten RB-Zellendurchmesser erstreckt. Je höher die Lage der Zellen, desto geringer ist der Betrag des horizontalen Gradienten im zentralen Bereich der RB-Zelle. Die obersten Zellen innerhalb der Messfläche weisen für den zentralen Bereich keinen bzw. sogar einen positiven Temperaturgradienten (Temperaturzunahme von links nach rechts) auf. In Wandnähe fallen die Temperaturen der oberen Zellen am stärksten ab, während die unteren Zellen, insbesondere zum rechten Rand, einen Anstieg zeigen.

Die Standardabweichungen der akustisch virtuellen Temperaturen zeigen ebenfalls eine deutliche Positionsabhängigkeit. Im Zentrum der RB-Zelle sind die Fluktuationen am geringsten, während sie in Wandnähe maximal werden. Am linken Rand zeigen die unteren Zellenwerte die größten Fluktuationen, am rechten Rand die oberen. Vollständige Symmetrie bezüglich der zentralen vertikalen Achse wird in etwa mittlerer Höhe der RB-Zelle, für  $z_{RB} = 2,8$  m, erreicht. Ursache für die geringeren maximalen Standardabweichungen am rechten Rand ist die Anordnung der tomographischen Messfläche innerhalb der RB-Zelle. Die untere Grenze der Messfläche befindet sich mit 0,4 m deutlich näher an der unteren thermischen Grenzschicht als die obere Messfeldgrenze, welche 0,9 m unterhalb der Kühlplatte angeordnet ist. Die größere Nähe zur unteren Grenzschicht wirkt sich somit direkt in Form einer höheren Variabilität auf die Standardabweichung der Zellenwerte aus. Vergleicht man die vertikalen Unterschiede im zentralen Bereich der RB-Zelle lässt sich feststellen, dass die größten Schwankungen in den obersten und untersten Tomographiegitterzellen auftreten. Die höchsten Werte werden in den untersten Zellen erreicht, welche wiederum den geringsten Abstand zu einer thermischen Grenzfläche besitzen.

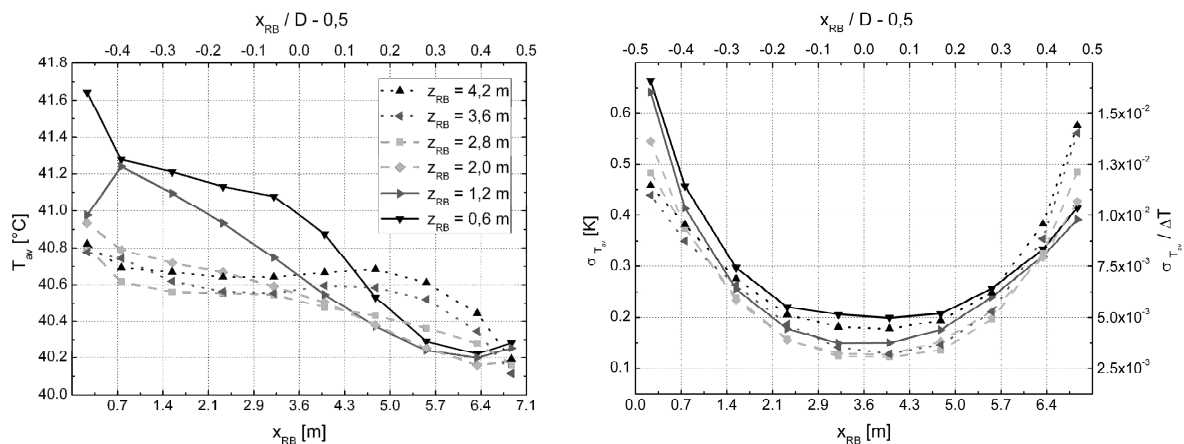


Abbildung 63: Räumliche Struktur der zeitlich gemittelten akustisch virtuellen Temperatur  $T_{av}$  (links) sowie die entsprechenden Standardabweichungen  $\sigma_{T_{av}}$  (rechts). Jedes Symbol entspricht dem zeitlichen Mittel bzw. der Standardabweichung in einer Gitterzelle in der angegebenen  $(x_{RB}, z_{RB})$  Position bezogen auf die Gesamtausdehnung der Rayleigh-Bénard-Konvektionszelle. Während des Experimentes betrug die Höhe der RB-Zelle  $H = 5,3$  m und der Durchmessers  $D = 7,15$  m.

Eine Analyse der Strömungssituation innerhalb des Ilmenauer Fasses lässt sich anhand der Strömungskomponenten in horizontaler Richtung ( $u$ ) und vertikaler Richtung ( $w$ ) abschätzen. Quantitative Vergleiche können jedoch aufgrund der in Kapitel 7.2.3 beschriebenen Probleme, welche sich aus den begrenzten Möglichkeiten der Versuchsanordnung ergeben haben, nur begrenzt durchgeführt werden. Dennoch soll an dieser Stelle nicht auf qualitative Aussagen zur räumlichen Struktur der Strömung verzichtet werden.

Die Analyse der Strömungsmuster erfolgt anhand der zeitlichen Mittelwerte der Strömungskomponenten  $u$  und  $w$  in jeder Tomographiegitterzelle sowie deren Standardabweichungen, welche in Abbildung 64 und Abbildung 65 dargestellt sind.

Die horizontale Komponente der Strömung (Abbildung 64, links) zeigt mittlere Strömungsgeschwindigkeiten im Bereich von  $\pm 0,4 \text{ m s}^{-1}$ . Maximale Beträge werden innerhalb der untersten Schicht im zentralen Bereich der RB-Zelle erreicht. Negative Werte entsprechen dabei einer Bewegung von rechts nach links. Im oberen Teil der Tomographiemessfläche wurden im Mittel positive horizontale Strömungsgeschwindigkeiten detektiert, die Bewegung erfolgt hier von links nach rechts. Die geringsten Geschwindigkeiten findet man im mittleren Bereich der RB-Zelle. Hier wurde die Umkehr der Windrichtung detektiert. Aufgrund einer festen Berandung der RB-Zelle ist zu erwarten, dass die Geschwindigkeiten nahe der Wände Null werden (Haftreibungsbedingung). Die Daten zeigen diesen Rückgang der Strömungsgeschwindigkeit zum Rand jedoch noch nicht deutlich, da die Tomographiegitterzellen noch zu weit von den Begrenzungsflächen entfernt sind.

Die größten Standardabweichungen der horizontalen Strömungskomponente werden im Bereich der seitlichen RB-Zellengrenze erreicht. Minimal werden die Werte in der Mitte der RB-Zelle. Da dort die absoluten Geschwindigkeiten jedoch auch am geringsten sind, liegen die Fluktuationen mit  $0,1 \text{ m s}^{-1}$  bereits im Bereich der Geschwindigkeitsmittelwerte selbst.

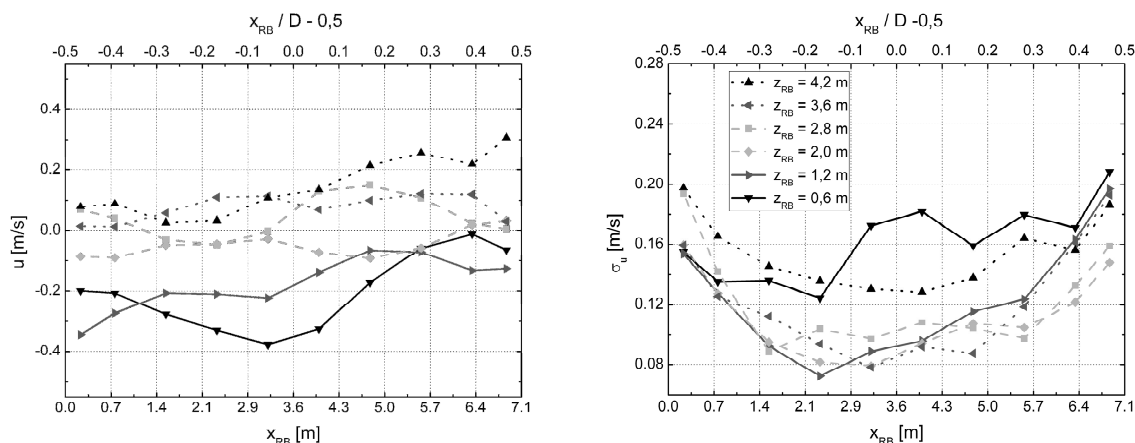


Abbildung 64: Räumliche Struktur der zeitlich gemittelten horizontalen Windkomponente  $u$  (links) sowie die entsprechenden Standardabweichungen  $\sigma_u$  (rechts). Jedes Symbol entspricht dem zeitlichen Mittel bzw. der Standardabweichung in einer Gitterzelle in der angegebenen  $(x_{RB}, z_{RB})$  Position bezogen auf die Gesamtausdehnung der Rayleigh-Bénard-Konvektionszelle. Während des Experimentes betrug die Höhe der RB-Zelle  $H = 5,3 \text{ m}$  und der Durchmesser  $D = 7,15 \text{ m}$ .

Die Geschwindigkeitsbeträge der vertikalen Strömungskomponente (Abbildung 65, links) liegen in einem Bereich von  $\pm 0,5 \text{ m s}^{-1}$ . Sie sind etwas größer, als die Werte der horizontalen Komponente. Dies ist wiederum auf die räumliche Nähe zu den Wandgrenzschichten zurückzuführen. Während die untere bzw. obere Grenze der Tomographiemessfläche  $0,4 \text{ m}$  bzw.  $0,9 \text{ m}$  von der Begrenzung entfernt sind, beträgt der Abstand der Messfläche zu den Seitenwänden lediglich  $0,1 \text{ m}$ . Das akustische Messsystem kann daher direkt das Auf- und Absteigen der Luft im Bereich der seitlichen Grenzen registrieren, wohingegen die Haupt-

strömung entlang der unteren und oberen Grenzschicht bereits außerhalb der Tomographiemessfläche liegt.

Die mittleren vertikalen Geschwindigkeitskomponenten zeigen eine deutliche horizontale Abhängigkeit. Positive Werte, d. h. aufsteigende Luft, findet man am linken Rand, während am rechten Rand negative Werte, d. h. absinkende Luft, detektiert wurden. Maximale Vertikalgeschwindigkeiten findet man in der linken unteren Ecke der Tomographiemessfläche, in welchem die Temperaturen und ebenfalls deren Schwankungen maximal sind. Die Geschwindigkeit der Aufwärtsbewegung nimmt am linken Rand nach oben hin ab. Am rechten Rand ist die untere Messfeldgrenze der Bereich mit der geringsten Abwärtsbewegung, während im mittleren und oberen Teil der RB-Zelle höhere Werte erreicht werden. Im Zentrum der Zelle finden unabhängig von der vertikalen Lage nur geringe Vertikalbewegungen statt.

Ein Rückgang der Vertikalkomponente auf Null an den Rändern der RB-Zelle (Haftbedingung) konnte mit den akustisch tomographischen Messungen nicht gezeigt werden, da sich die Ränder der Messfläche in zu großem Abstand zu den Wänden befanden.

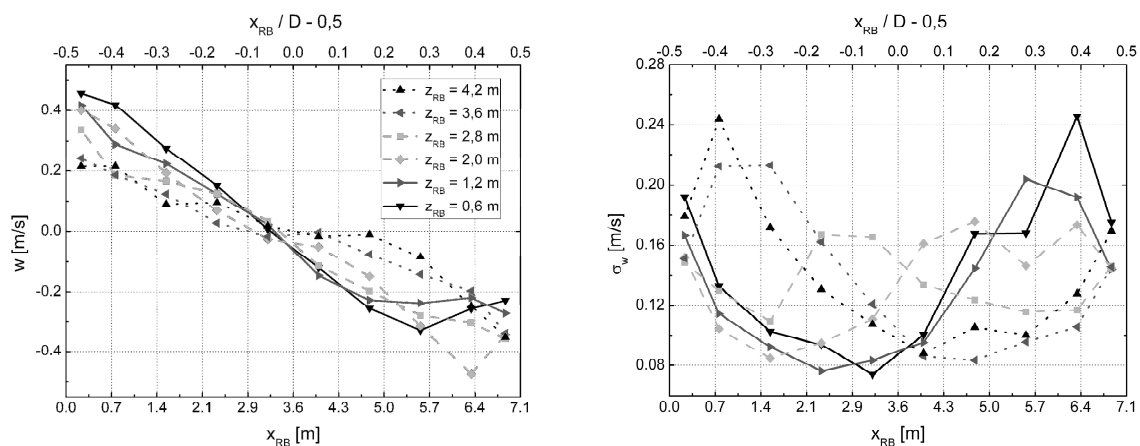


Abbildung 65: Räumliche Struktur der zeitlich gemittelten vertikalen Windkomponente  $w$  (links) sowie die entsprechenden Standardabweichungen  $\sigma_w$  (rechts). Jedes Symbol entspricht dem zeitlichen Mittel bzw. der Standardabweichung in einer Gitterzelle in der angegebenen  $(x_{RB}, z_{RB})$  Position bezogen auf die Gesamtausdehnung der Rayleigh-Bénard-Konvektionszelle. Während des Experimentes betrug die Höhe der RB-Zelle  $H = 5,3$  m und der Durchmesser  $D = 7,15$  m.

Die Standardabweichungen der Vertikalbewegung (Abbildung 65, rechts) zeigen die höchsten Amplituden in der Nähe der Seitenwände ( $x_{RB}/D - 0,5 \approx \pm 0,4$ ) für die untersten bzw. obersten Tomographiegitterzellen. Das Maximum der Standardabweichungen in den untersten Zellen liegt nahe des rechten Randes, das Maximum der oberen Schicht nahe des linken Randes. In beiden Höhen wird ein weiteres lokales Maximum detektiert, welches sich jeweils auf der entgegengesetzten Seite der Messfläche in unmittelbarer Nähe zur Seitenwand befindet. Minimale Schwankungen der oberen und unteren Gitterzellenwerte sind in einem Bereich von etwa  $x_{RB}/D - 0,5 \approx \pm 0,1$  zu finden. Die Standardabweichungen im mittleren Bereich der Tomographiemessfläche zeigen ebenfalls lokale Maxima, welche

aber im Vergleich zu den oberen und unteren Gitterzellen horizontal in Richtung Mitte der RB-Zelle verschoben sind. Im zentralen Höhenbereich treten die größten Schwankungen der vertikalen Strömungskomponenten nahe der Zellenmitte auf, fallen zu den Seitenwänden zunächst ab und steigen dann erneut an. In den Randbereichen liegen die Standardabweichungen im Größenbereich der mittleren Werte oder darunter. Im Zentrum übersteigen die Fluktuationen mit bis zu  $0,16 \text{ m s}^{-1}$  (mittlere Höhe) die mittlere Vertikalströmungsgeschwindigkeit ( $w \approx 0 \text{ m s}^{-1}$ ) deutlich.

### **7.2.5. Charakterisierung der räumlichen Struktur der Konvektion**

Die Anwendung des akustisch tomographischen Systems im Ilmenauer Fass hat gezeigt, dass die zeitgleiche Erfassung von Strömungsgeschwindigkeit und Temperatur mit dem Verfahren der akustischen Laufzeit tomographie möglich ist. Beide Größen können mit gleicher räumlicher Auflösung rekonstruiert werden. Die Anordnung der Sender und Empfänger konnte bei der vorgestellten Messung lediglich an den seitlichen Wänden innerhalb des Fasses erfolgen. Hierdurch ergab sich ein Schallstrahlenfeld, welches durch eine Vorzugsrichtung gekennzeichnet war. Simulationen der Rekonstruktionseigenschaften mit vorgegebenen Verteilungen der Strömung haben bewiesen, dass durch diese inhomogene Überdeckung des Messfeldes mit Schallstrahlen größere Fehler bei der Rekonstruktion der Strömungskomponenten zu erwarten sind. Die Untersuchungen zeigten jedoch ebenfalls, dass die Grobstruktur der Strömung dennoch gut wiedergegeben wird. Für folgende Experimente muss auf eine Anordnung der Sender und Empfänger geachtet werden, die eine homogene Überdeckung des Untersuchungsgebietes mit Schallstrecken aus allen Richtungen erlaubt.

Aus den Analysen der zeitlichen Mittelwerte der Temperatur und Strömungskomponenten sowie deren Standardabweichungen und im Hinblick auf die dargestellten Beispieldiagramme lassen sich Aussagen über die räumliche Struktur der Konvektion im Ilmenauer Fass ableiten. Geringe Fluktuationen (niedrige Standardabweichungen) charakterisieren Gebiete mit nahezu konstanten Eigenschaften. Hohe Standardabweichungen spiegeln einen hohen Grad an Veränderlichkeit wider.

Die grobe Struktur der Strömung kann als Wirbel beschrieben werden, welcher die gesamte RB-Zelle erfasst. Maximale Strömungsgeschwindigkeiten werden am Rand der RB-Zelle erreicht. Ausgehend von der beheizten Unterseite erfolgt die Erwärmung der Luft, wodurch sich deren Dichte verringert und ein Aufsteigen angeregt wird. Dieses Aufsteigen äußert sich in einer aufwärts gerichteten Bewegung, welche man an der linken Seite der RB-Zelle vorfindet. Die starke Variabilität der Temperatur in der Zelle in diesem Gebiet (links unten) ist ein Hinweis darauf, dass die Luft nicht konstant mit hoher Temperatur nach oben transportiert wird, sondern dass sich Warmluftblasen bilden, welche sich ablösen, wodurch wärmere und kühlere Perioden wechseln. Die Geschwindigkeit des Aufsteigens am linken Rand ist in den unteren Schichten am größten und verlangsamt sich in Richtung oberer Begrenzung. Am oberen linken Rand wurden große Schwankungen der

Geschwindigkeitskomponenten detektiert (horizontale und vertikale Richtung). Diese stärkeren Fluktuationen lassen darauf schließen, dass diese Gebiete neben der Hauptströmung durch kleinere Wirbel bzw. Störungen beeinflusst werden.

Entlang der oberen Begrenzung (Kühlplatte) verläuft die Bewegung von links nach rechts, wobei die horizontale Strömungsgeschwindigkeit von links nach rechts zunimmt. Am rechten Rand findet man die größten Temperaturfluktuationen der oberen Tomographiegitterzellen. Durch das Abkühlen der Luft an der Kühlplatte wird die Luftdichte erhöht und die Luft wird im Vergleich zur Umgebung schwerer. Dadurch wird ein Absinken induziert, welches analog zum Aufsteigen nicht kontinuierlich erfolgt. Das Absinken der Luft erfolgt am rechten Rand der RB-Zelle. Maximale Absinkgeschwindigkeiten werden oben erreicht. Auf der rechten RB-Zellenseite findet man die größten Fluktuationen der vertikalen Strömungskomponente im Bereich der unteren Tomographiegitterzellen. Diese Variation ist wiederum ein Hinweis darauf, dass sich dieses Gebiet nicht dauerhaft in der Region befindet, welche durch die großräumige Konvektionsströmung beeinflusst wird.

Im zentralen Bereich der RB-Zelle sind die Temperaturen nahezu konstant, die Variationen sind minimal. Dies lässt auf eine gute Durchmischung schließen. Die Strömungsgeschwindigkeiten zeigen Werte, welche nahe Null sind. In beiden Komponenten wird die Windumkehr deutlich, welche sich in der Vorzeichenänderung der jeweiligen Komponente äußert. Im zeitlichen Mittel befindet sich das Wirbelzentrum (verschwindender Strömung) bei  $(x_{RB}, z_{RB}) = (3,3 \text{ m}, 2,8 \text{ m})$  und damit nahe am räumlichen Mittelpunkt  $(3,6 \text{ m}, 2,7 \text{ m})$  der Zelle. Der zentrale Bereich ist jedoch auch durch eine große Schwankungsbreite der Strömungskomponenten gekennzeichnet, welche im Bereich der mittleren Geschwindigkeiten selbst und darüber liegt. Diese hohe Variabilität entspricht einer zeitlichen Verlagerung des Wirbelzentrums mit geringen Geschwindigkeiten in diesem Gebiet.

Qiu und Tong (2001) unterscheiden drei Raumbereiche innerhalb einer RB-Zelle in Abhängigkeit vom Abstand zu den Begrenzungsflächen. Sie untersuchten konvektive Phänomene in einer mit Wasser als Arbeitsmedium betriebenen Konvektionszelle. Zwei dieser Bereiche konnten mit den aktuellen tomographischen Messungen ebenfalls detektiert werden. Die zentrale Kernregion liegt im Zentrum der RB-Zelle und ist durch geringe Geschwindigkeiten, große Geschwindigkeitsfluktuationen und nahezu konstante Temperaturen gekennzeichnet. Der nächste Raumbereich, der sich in Richtung Begrenzungsflächen anschließt, wird als Zwischen- oder Mischungsschicht bezeichnet. Ausgehend von der Ausdehnung des Ilmenauer Fasses reicht diese Schicht laut Qui und Tong (2001) bis auf 0,15 m an die seitlichen Begrenzungsflächen und 0,11 m an die obere und untere Begrenzungsfläche heran ( $0,25 < x_{RB}/D - 0,5$  bzw.  $z_{RB}/H - 0,5 \leq 0,46$ ). In diesem Bereich findet die Durchmischung der von der Heizplatte aufsteigenden und von der Kühlplatte abfallenden Luftpakete statt. Der dritte Bereich, die viskose Grenzschicht, konnte mit dem Verfahren der akustischen Tomographie nicht nachgewiesen werden. Diese nur wenige Zentimeter dicke Grenzschicht, welche direkt an den Wänden der Zelle anliegt, lag bereits außerhalb der akustisch tomographischen Messfläche, welche sich bis minimal 0,1 m an die seitlichen Begrenzungsflächen annäherte.

Zur Untersuchung der viskosen Randgrenzschichten sowie kleinerer Wirbel und Strukturen, welche der Hauptströmung überlagert sind, war die räumliche Auflösung mit einer Gitterweite von  $0,8\text{ m} \times 0,8\text{ m}$  nicht fein genug. Das Auftreten subskaliger Strukturen kann zwar anhand der Analyse der Standardabweichungen der Zeitreihen gezeigt werden, spezielle Eigenschaften sind jedoch nicht nachweisbar. Ebenfalls konnte nicht nachgewiesen werden, dass die Hauptströmungsebene zeitlich fluktuiert, wie es von Resagk et al. (2006) gezeigt wurde. Hierfür wäre eine dreidimensionale Erfassung der Strömungskomponenten nötig bzw. eine zweidimensionale horizontale Messung in unmittelbarer Nähe zur Kühl- bzw. Heizplatte. Eine Analyse der zeitlichen Schwankungen innerhalb der einzelnen Gitterzellen ergab keine signifikanten Perioden. Eine Verringerung der Zeit zwischen zwei Einzelmessungen (bei der aktuellen Messung: 20 Sekunden) ist nötig, um schnellere Fluktuationen innerhalb der Gitterzellen erfassen zu können.

Trotz der genannten Defizite konnte gezeigt werden, dass die groben konvektiven Strukturen des Temperatur- und Strömungsfeldes innerhalb der Messfläche im Ilmenauer Fass erfasst werden konnten. Die Felder wurden gleichzeitig und nahezu unbeeinflusst vermessen. Des Weiteren war es zur Strömungsverfolgung nicht nötig, Partikel in das Volumen einzubringen. Mit der akustischen Tomographie lässt sich weiterhin vermeiden, dass eine räumliche Umordnung der Messapparatur vorgenommen werden muss, um ein anderes Gebiet innerhalb der RB-Zelle zu untersuchen. Somit konnte auch auf Wartezeiten zwischen den Messungen verzichtet werden, welche nötig sind, um sicherzustellen, dass sich ein stationärer Zustand innerhalb des konvektiven Systems eingestellt hat.



## 8. Schluss

Die akustische Laufzeittomographie ist ein Verfahren, welches auf der Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von den meteorologischen Größen Temperatur und Strömung entlang des Ausbreitungsweges beruht. Eine Kombination von Messungen der Laufzeiten entlang verschiedener Wege durch ein Gebiet bei bekannten Abständen der Sender und Empfänger erlaubt es, Rückschlüsse auf die Verteilungen von Temperatur und Strömung im Untersuchungsgebiet zu ziehen.

Bisherige Anwendungen der akustischen Laufzeittomographie zur Bestimmung der horizontalen Verteilungen von Temperatur und Strömung erfolgten innerhalb von Messgebieten, deren Ausdehnung wenige hundert Meter im Quadrat betragen. Die räumliche Auflösung der Felder in den Untersuchungsgebieten lag bei minimal  $40\text{ m} \times 40\text{ m}$  für das Temperaturfeld (Ziemann et al., 2001). Die Strömungseigenschaften hingegen wurden mit deutlich geringerer räumlicher Auflösung im Vergleich zum Temperaturfeld angegeben (Arnold et al., 2004).

Eine untere Grenze für die Ausdehnung der Messfläche stellten die Anforderungen an die Genauigkeit der Temperatur- bzw. Strömungsbestimmung ( $< 0,5\text{ K}$  bzw.  $0,5\text{ m s}^{-1}$ , s. z. B. Ziemann et al., 1999) aus den akustischen Messungen dar. Je kürzer eine Schallstrecke ist, umso exakter muss die Positions- und Laufzeitbestimmung erfolgen, um gleiche Genauigkeiten bei Temperatur- und Strömungsbestimmung zu erreichen.

Ziel der Arbeit war zum einen die Erhöhung der räumlichen Auflösung des Strömungsfeldes innerhalb der Messfläche. Zum anderen sollte die Genauigkeit des Messsystems derart verbessert werden, dass auch Untersuchungen in Messgebieten mit geringerer räumlicher Ausdehnung (wenige Meter Kantenlänge) bei gleicher Anzahl an Untergliederungen innerhalb der Messfläche und gleichen Anforderungen an die Genauigkeiten bei der Temperatur- und Strömungsbestimmung möglich sind.

Die Erhöhung der räumlichen Auflösung des Strömungsfeldes konnte durch die Einführung eines Algorithmus zur Vektortomographie erreicht werden. Um eine Kongruenz zur Rekonstruktion der Temperaturverteilungen zu wahren, wurde für die Strömungsrekonstruktion, wie für die Temperaturrekonstruktion, die simultane iterative Rekonstruktionstechnik eingesetzt. Eine Überprüfung der Rekonstruktionsgüte des Algorithmus erfolgte anhand von Sensitivitätsstudien. Hierfür wurden verschiedene Strömungsfelder simuliert, welche entsprechend einer vorgegebenen Verteilung von Schallsendern und -empfängern in simulierte Messdaten überführt wurden. Sind die Lautsprecher und Mikrophone gleichmäßig um das Untersuchungsgebiet verteilt, d. h. ist eine homogene Überdeckung des Messgebietes mit Schallstrecken gewährleistet, können die vorgegebenen Verteilungen mit lediglich geringen Abweichungen rekonstruiert werden. Die besten Übereinstimmungen zwischen vorgegebenen und rekonstruierten Feldern werden erreicht, wenn man eine schwache Kopplung zwischen benachbarten Gitterzellen zulässt (vgl. Kapitel 5).

Des Weiteren konnte mit Hilfe der Simulationen gezeigt werden, dass die Anordnung der Sender und Empfänger einen wesentlichen Einfluss auf das Rekonstruktionsergebnis der richtungsabhängigen Komponenten des Strömungsfeldes ausübt. Ist eine gleichverteilte Anordnung der Sender und Empfänger um das gesamte Messgebiet nicht möglich, treten insbesondere in den Randbereichen der Messfläche deutliche Abweichungen zwischen vorgegebenen und simulierten Verteilungen des Strömungsfeldes auf (vgl. Kapitel 7.2.3). Eine homogene Anordnung der akustischen Sensoren um das gesamte Untersuchungsgebiet ist demnach zwingend erforderlich, um das vektorielle Strömungsfeld verlässlich rekonstruieren zu können.

Um eine Anwendung des akustisch tomographischen Systems auf räumlichen Skalen mit Messflächen von wenigen Metern Seitenlänge zu ermöglichen, wurde die Genauigkeit bei der Bestimmung der Messgrößen (Positions- und Laufzeitbestimmung) erhöht. Hierfür konnten einerseits Verbesserungen durch die Verwendung moderner Hardwarekomponenten erreicht und andererseits eine Optimierung der Software hinsichtlich der verwendeten Signalmuster sowie der Analysealgorithmen zur Laufzeitbestimmung vorgenommen werden.

Die Unsicherheiten bei der Bestimmung der Schallweglängen konnten durch den Einsatz von Schallsendern mit geringer räumlicher Ausdehnung auf wenige Millimeter verringert werden. Des Weiteren erlauben diese speziell für die akustische Laufzeittomographie entwickelten Sender (Kapitel 6.1.2) eine homogene Abstrahlung akustischer Signale innerhalb der Messebene. Somit kann die Positionierung der Lautsprecher flexibel in und um das Untersuchungsgebiet erfolgen.

Eine Verbesserung der Laufzeitbestimmung konnte durch den Einsatz einer modernen akustischen Messkarte (Kapitel 6.1.1) realisiert werden. Hierbei erlaubt eine hohe Abtastrate der Schallsignale sowie eine stabile zeitliche Basis bezüglich Aussenden und Empfangen der Signale ein hohes Maß an Genauigkeit.

Eine weitere Verbesserung konnte durch eine Erweiterung der Software zur Nutzung breitbandiger Schallsignale (pseudostochastisches Rauschen, auch als Maximallängenfolgen, MLS, bezeichnet, vgl. Kapitel 3.3.3) erreicht werden. Da die Laufzeitbestimmung auf Berechnungen des Maximums der Kreuzkorrelationsfunktion zwischen gesendeten und empfangenen Signalen beruht, sind diese pseudostochastischen Rauschsignale zur Laufzeitbestimmung besonders geeignet. Sie zeichnen sich durch hervorragende Korrelationseigenschaften aus, wobei verschiedene Rauschfolgen keine Korrelation untereinander aufweisen, während die Autokorrelationsfunktion einer MLS nahezu einem Impuls entspricht. Diese Faktoren, gekoppelt mit dem Einsatz von Interpolationstechniken, welche aus der digitalen Signalverarbeitung bekannt sind, erlauben eine Genauigkeit der Laufzeitbestimmung, welche im Bereich von  $3 \mu\text{s}$  liegt.

Die Gesamtheit der vorgenommenen Verbesserungen des akustisch tomographischen Systems führten dazu, dass die Empfindlichkeit hinsichtlich Temperatur- und Strömungseigenschaften bezüglich einer Referenzmessung bei Schallstreckenlängen über zwei Metern Länge auf unter  $0,3 \text{ K}$  für die Temperatur bzw.  $0,2 \text{ m s}^{-1}$  für die Strömungsgeschwindigkeit

gesenkt werden konnte. Für Absolutmessungen (ohne Referenzmessung) werden die eingangs geforderten Unsicherheiten von 0,5 K bzw.  $0,5 \text{ m s}^{-1}$  für Schallweglängen ab etwa 5 m erreicht.

Anhand zweier Beispiele wird die Anwendbarkeit des akustisch tomographischen Systems demonstriert. Die Größe der Messfläche betrug im ersten Beispiel  $3,3 \text{ m} \times 3,3 \text{ m}$ , welche in Teilflächen mit einer Ausdehnung von  $0,7 \text{ m} \times 0,7 \text{ m}$  untergliedert wurde. Durch Verwendung der akustischen Laufzeittomographie in dem vertikal ausgerichteten Untersuchungsgebiet konnten Aussagen zur Homogenität bezüglich der Temperaturverteilung innerhalb der Messfläche getroffen werden (Kapitel 7.1).

In einem zweiten Beispiel wurde das Verfahren zur Erfassung thermisch induzierter turbulenter Strukturen in einem Untersuchungsgebiet von  $7 \text{ m} \times 4 \text{ m}$  eingesetzt, wobei eine Untergliederung der Messfläche in Teilflächen mit einer Ausdehnung von  $0,8 \text{ m} \times 0,8 \text{ m}$  erfolgte. Trotz der Tatsache, dass eine homogene Anordnung der Sender und Empfänger um das Messgebiet bei diesem Experiment nicht möglich war, konnte demonstriert werden, dass die Sensitivität des Verfahrens ausreicht, um Temperaturschwankungen und thermisch induzierte Strömungsmuster zu erfassen.

Letztendlich ist es gelungen, ein akustisch tomographisches System zu entwickeln, welches als Messsystem zur gleichzeitigen Bestimmung von Temperatur- und Strömungsfeldern mit gleicher räumlicher Auflösung in Gebieten mit einer Ausdehnung ab wenigen Metern Kantenlänge eingesetzt werden kann. Die Empfindlichkeit des Systems reicht dabei aus, um geringe Strömungsgeschwindigkeiten ( $\leq 0,2 \text{ m s}^{-1}$ ) und Temperaturunterschiede ( $\leq 0,3 \text{ K}$ ) nachzuweisen. Des Weiteren kann das System als Laborvariante zur Demonstration tomographischer Techniken sowie zum Test neuer Algorithmen und Komponenten eingesetzt werden.



# Literatur

- Aki, K., W. H. K. Lee, 1976: Determination of three-dimensional velocity anomalies under a seismic array using first P arrival times from local earthquakes. 1. A homogeneous initial model. *J. geophys. Res.*, **81**, 4381-4399.
- Andersen, A. H., A. C. Kak, 1984: Simultaneous algebraic reconstruction technique (SART): A superior implementation of the ART algorithm. *Ultrasonic Imaging*, **6**, 81-94.
- Arnold, K., 2000: Ein experimentelles Verfahren zur Akustischen Tomographie im Bereich der atmosphärischen Grenzschicht. *Wiss. Mitteilungen aus dem Institut für Meteorologie der Universität Leipzig und dem Institut für Troposphärenforschung e.V. Leipzig*, **18**, Dissertation, 136 S.
- Arnold, K., A. Ziemann, A. Raabe, 2001: Tomographic monitoring of wind and temperature in different heights above the ground. *acta acustica - ACUSTICA*, **87**, 703-708.
- Arnold, K., A. Ziemann, A. Raabe, G. Spindler, 2004: Acoustic tomography and conventional meteorological measurements over heterogeneous surfaces. *Meteorol. Atmosph. Phys.*, **85**, 175-186.
- Assmann, R., 1892: Das Aspirations-Psychrometer – ein Apparat zur Bestimmung der wahren Temperatur und Feuchtigkeit der Luft. *Abhandlungen des Königl.-Preuss. Meteorolog. Instituts*; **1** (5), 117-270.
- Atkins, P. W., 2001: *Physikalische Chemie*. Wiley-VCH, Weinheim, New York, Chichester, Brisbane, Singapore, Toronto, 1789 S.
- Baehr, H. D., 2005: *Thermodynamik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 651 S.
- Barrett, E. W., V. E. Suomi, 1949: Preliminary report on temperature measurement by sonic means. *Journal of Meteorology*, **6**, 273-276.
- Barth, M., A. Raabe, P. Holstein, R. Müller, A. Ziemann, K. Arnold, D. Mackenzie, 2004: Acoustic travel time tomography as a tool to investigate temperature distributions and flows on different horizontal spatial scales. *Proceedings of the 12th International Symposium on Acoustic Remote Sensing and Associated Techniques of the Atmosphere and Oceans (ISARS)*, Cambridge, UK, Addendum 5-9.
- Barth, M., A. Raabe, K. Arnold, C. Resagk, R. du Puits, 2007: Flow field detection using acoustic travel time tomography. *Meteorol. Z.*, **16** (4), 443-450.
- Barton, E. H., 1899: On the Refraction of Sound by Wind. *Proc. Phys. Soc. London*, **17**, 534-542.
- Bass, H. E., 1981: Absorption of sound by air: High temperature predictions. *J. Acoust. Soc. Am.*, **69** (1), 124-138.

- Bass, H. E., L. N. Bolen, R. Raspet, W. McBride, J. Noble, 1991: Acoustic propagation through a turbulent atmosphere: Experimental characterization. *J. Acoust. Soc. Am.*, **90** (6), 3307-3313.
- Bass, H. E., L. C. Sutherland, A. J. Zuckerwar, D. T. Blackstock, D. M. Hester, 1995: Atmospheric absorption of sound: Further developments. *J. Acoust. Soc. Am.*, **97** (1), 680-683.
- Bérenghier, M. C., B. Gauvreau, Ph. Blanc-Benon, D. Juvé, 2003: Outdoor Sound Propagation: A Short Review on Analytical and Numerical Approaches. *acta acustica - ACUSTICA*, **89**, 980-991.
- Blokhintzev, D., 1946: The Propagation of Sound in an Inhomogeneous and Moving Medium II. *J. Acoust. Soc. Am.*, **18** (2), 329-334.
- Bohn, D. A., 1988: Environmental Effects on the Speed of Sound. *J. Audio Eng. Soc.*, **36** (4), 223-231.
- Bohn, B., H. Zilken, 2004: Model-aided radiometric determination of photolysis frequencies in a sunlit atmosphere simulation chamber. *Atmos. Chem. Phys. Discuss.*, **4**, 6967-7010.
- Bohn, B., F. Rohrer, T. Brauers, A. Wahner, 2005: Actinometric measurements of NO<sub>2</sub> photolysis frequencies in the atmosphere simulation chamber SAPHIR. *Atmos. Chem. Phys.*, **5**, 493-503.
- Boone, M. M., E., A. Vermaas, 1991: A new ray-tracing algorithm for arbitrary inhomogeneous and moving media, including caustics. *J. Acoust. Soc. Am.*, **90** (4), 2109-2117.
- Borish, J. und J. B. Angell, 1983: An Efficient Algorithm for Measuring the Impulse Response Using Pseudorandom Noise. *J. Audio Eng. Soc.*, **31** (7), 478-488.
- Borucki, H., 1989: *Einführung in die Akustik*. Wissenschaftsverlag Mannheim Leipzig Wien Zürich, 260 S.
- Brauers, T., J. Bossmeyer, H.-P. Dorn, E. Schlosser, R. Tillmann, R. Wegener, A. Wahner, 2007: Investigation of the formaldehyde differential absorption cross section at high and low spectral resolution in the simulation chamber SAPHIR. *Atmos. Chem. Phys.*, **7**, 3579-3586.
- Brigham, E. O., 1992: *Schnelle Fourier-Transformation*. Oldenbourg Verlag München Wien, 301 S.
- Brown, E. H., S. F. Clifford, 1973: Spectral broadening of an acoustic pulse propagating through turbulence. *J. Acoust. Soc. Am.*, **54** (1), 36-39.
- Brown, E. H., S. F. Clifford, 1976: On the attenuation of sound by turbulence. *J. Acoust. Soc. Am.*, **60** (4), 788-794.
- Brown, E. H., F. F. Hall, 1978: Advances in Atmospheric Acoustics. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, **16** (1), 47-110.
- Brzostowski, M. A., G. A. McMechan, 1992: 3-D tomographic imaging of near-surface seismic velocity and attenuation. *Geophysics*, **57** (3), 396-403.

- Chandrasekhar, S., 1981: *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover, New York.
- Chessel, C. I., 1976: Observations of the effect of atmospheric turbulence on low-frequency sound propagation. *J. Acoust. Soc. Am.*, **60** (1), 29-33.
- Chessel, C. I., 1977: Propagation of noise along a finite impedance boundary. *J. Acoust. Soc. Am.*, **62** (4), 825-834.
- Chunchuzov, I. P., 2004: Influence of internal gravity waves on sound propagation in the lower atmosphere. *Meteorol. Atmos. Phys.*, **85**, 61-76.
- Chunchuzov, I. P., G. A. Bush, S. N. Kulichkov, 1990: On acoustical impulse propagation in a moving inhomogeneous atmospheric layer. *J. Acoust. Soc. Am.*, **88** (1), 455-461.
- Chunchuzov, I. P., S. Kulichkov, A. Otrezov, V. Perepelkin, 2005: Acoustic pulse propagation through a fluctuating stably stratified atmospheric boundary layer. *J. Acoust. Soc. Am.*, **117** (4), 1868-1879.
- Clifford, S. F., E. H. Brown, 1970: Propagation of Sound in a Turbulent Atmosphere. *J. Acoust. Soc. Am.*, **48** (5), 1123-1127.
- Cohn, M. und A. Lempel, 1977: On Fast M-Sequence Transforms. *IEEE Trans. Inform. Theorie*, **23**, 135-137.
- Daigle, G. A., 1982: Diffraction of sound by a noise barrier in the presence of atmospheric turbulence. *J. Acoust. Soc. Am.*, **71** (4), 847-854.
- Daigle, G. A., J. E. Piercy, T. F. W. Embleton, 1983: Line-of-Sight Propagation through Atmospheric Turbulence near the Ground. *J. Acoust. Soc. Am.*, **74** (5), 1505-1513.
- Domke, M., 2005: Entwurf und Optimierung von Sender- Empfänger- Systemen für akustisch tomographische Anwendungen. Magisterarbeit an der Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur (HTWK) Leipzig, Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik.
- Dössel, O., 2000: *Bildgebende Verfahren in der Medizin: Von der Technik zur medizinischen Anwendung*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 378 S.
- Durst, F., A. Melling, J. H. Whitelaw, 1981: *Principles and Practice of Laser-Doppler Anemometry*. 2nd ed., Academic Press, London, 437 S.
- Embleton, T. F. W., J. E. Piercy, N. Olson, 1976: Outdoor sound propagation over ground of finite impedance. *J. Acoust. Soc. Am.*, **59** (2), 267-277.
- Evans, L. B., H. E. Bass, L. C. Sutherland, 1971: Atmospheric Absorption of Sound: Theoretical Predictions. *J. Acoust. Soc. Am.*, **51** (5), 1565-1575.
- Evans, S., P. B. Stark, 2002: Inverse problems as statistics. *Inverse Problems*, **18**, R55-R97.
- Farina, A., 1998: MLS Impulse Response Measurements for Underwater bottom Profiling. 4th European Conference on Underwater Acoustics, Rome, Italy, 6 S.
- FFTW, 2006: FFTW Webpage. <http://www.fftw.org>.
- Finger, A., 1997: *Pseudorandom-Signalverarbeitung*. Teubner Stuttgart, 308 S.

- Fischer, 2006: Aspirationspsychrometer nach Assmann, Produktdatenblatt von 2005. URL: <http://www.fischer-barometer.de/datenblaetter/D430101.pdf> - Feingerätebau K. Fischer GmbH, Venusberger Str. 24, 09430 Drebach, Germany, 4 S.
- Fliege, N., 1991: *Systemtheorie*. Teubner Stuttgart, 403 S.
- Foken, T., 2003: *Angewandte Meteorologie*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 289 S.
- Frey, H. U., S. Frey, D. Larson, T. Nygrén, J. Semeter, 1998: Tomographic methods for magnetospheric applications. In: V. Angelopoulos, P. V. Panetta (Eds.): Science Closure and Enabling Technologies for Constellation Class Missions. Berkeley, 72-77.
- Geschke, D., P. Kirsten, M. Krötzsch, W. Schenk, H. A. Schneider, H. Schulze, 1994: *Physikalisches Praktikum*. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart, Leipzig, 288 S.
- Gilbert, P., 1972: Iterative Methods for the Three-dimensional Reconstruction of an Object from Projections. *J. theor. Biol.*, **36**, 105-117.
- Golomb, S. W., 1982: *Shift Register Sequences*. Aegean Park Press, Walnut Creek, California, USA, 247 S.
- Gordon, R., 1974: A Tutorial an ART. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, **N-21**, 78-93.
- Gordon, R., R. Bender, G. T. Herman, 1970: Algebraic Reconstruction Techniques (ART) for Tree-dimensional Electron Microscopy and X-ray Photography. *J. theor. Biol.*, **29**, 471-481.
- Görne, T., 1996: *Mikrofone in Theorie und Praxis*, ELEKTOR-Verlag, 300 S.
- Grimsehl, E., 1987: *Lehrbuch der Physik, Band 1, Mechanik-Akustik-Wärmelehre*. 25. Auflage, BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, Kapitel 13, 350-373.
- Groves, G. V., 1955: Geometrical theory of sound propagation in the atmosphere. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, **7**, 113-127.
- Gumas, C. C., 1997: A century old, the fast Hadamard transform proves useful in digital communications. *Personal Engineering*, November 1997, 57-63.
- Hadamard, M. J., 1893: Résolution d'une question relative aux déterminants. *Bull. Sci. Math.*, **17**, 240-246.
- Hallberg, B., C. Larsson, S. Israelsson, 1988: Some aspects on sound propagation outdoors. Meteorologische Einflüsse auf die Schallausbreitung: Ergebnisse des Vorkolloquiums zur DAGA '86, Schriftenreihe der Universität Oldenburg, Heinz Holzberg Verlag, Oldenburg.
- Hanafusa, T., T. Fujitani, Y. Kobori, Y. Mitsuna, 1982: A New Type Sonic Anemometer-Thermometer for Field Operation. *Pap. Meteorol. Geophys.*, **33** (1), 1-19.
- Hanson, K. M., 1987: Bayesian and Related Methods in Image Reconstruction from Incomplete Data. In: Stark (Ed.): Image Recovery: Theory and Applications. 79-125.
- Harris, C. M., 1971: Effects of Humidity on the Velocity of Sound in Air. *J. Acoust. Soc. Am.*, **49** (3), 890-893.



- Hauck, A., 1990: Tomographie von Vektorfeldern. Fortschrittberichte VDI, Reihe 8: Meß-, Steuerungs- und Regelungstechnik, Nr. 220, VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf, Dissertation, Universität Karlsruhe, 126 S.
- Heimann, D. und G. Gross, 1998: Coupled simulation of meteorological parameters and sound level in a narrow valley. *Applied Acoustics*, **56**, 73-100.
- Herman, G. T., A. Lent, S. W. Rowland, 1973: ART: Mathematics and Applications-A Report on the Mathematical Foundations and on the Applicability to Real Data of the Algebraic Reconstruction Technique. *J. theor. Biol.*, **42**, 1-32.
- Hoffmann, R., 1998: Signalanalyse und -erkennung. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 422 S.
- Holstein, P., A. Raabe, R. Müller, M. Barth, D. Mackenzie, E. Starke, 2004: Acoustic tomography on the basis of travel-time measurement. *Meas. Sci. Technol.*, **15**, 1420-1428.
- Humphreys, E., R. W. Clayton, 1988: Adaptation of Back Projection Tomography to Seismic Travel Time Problems. *J. geophys. Res.*, **93**, 1073-1085.
- ISO 9613-2, 1996: Dämpfung des Schalls bei der Ausbreitung im Freien, Teil 2: Allgemeines Berechnungsverfahren.
- Kaczmarz, S., 1937: Angenäherte Auflösung von Systemen linearer Gleichungen. *Bull. Acad. Pol. Sci. Lett. A*, **6-8A**, 355-357.
- Kadoya, K., N. Matsunaga, A. Nagashima, 1985: Viscosity and Thermal Conductivity of Dry Air in the Gaseous Phase. *J. Phys. Chem. Ref. Data*, **14** (4), 947-970.
- Kaimal, J. C., J. A. Businger, 1963a: A Continuous Wave Sonic Anemometer-Thermometer. *J. Appl. Meteorol.*, **2** (1), 156-164.
- Kaimal, J. C., J. A. Businger, 1963b: Preliminary Results Obtained with a Sonic Anemometer-Thermometer. *J. Appl. Meteorol.*, **2** (1), 180-186.
- Kaipio, J. P., V. Kolehmainen, E. Somersalo, M. Vauhkonen, 2000: Statistical inversion and Monte Carlo sampling methods in electrical impedance tomography. *Inverse Problems*, **16**, 1487-1522.
- Kak, A. C., M. Slaney, 1988: *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. IEEE Press, New York, 329 S.
- Kob, M. und M. Vorländer, 1996: Der Einfluss von Wind bei Maximalfolgenmessungen. Fortschritte der Akustik – DAGA 1996, 280-281.
- Kraus, H., 2004: *Die Atmosphäre der Erde*. Springer, Berlin, Heidelberg, 422 S.
- Kuttruff, H., 2004: *Akustik – Eine Einführung*. S. Hirzel Verlag Stuttgart Leipzig, 450 S.
- Laepple, T., V. Knab, K.-U. Mettendorf, I. Pundt, 2004: Longpath DOAS tomography on a motorway exhaust gas plume: numerical studies and application to data from the BAB II campaign. *Atmos. Chem. Phys. Discuss.*, **4**, 2435-2484.
- Laplace, P. S., 1816: Sur la Vitesse du son dans l'air et dans l'eau. *Ann. Chim. Phys.*, **3** (2), 238-241.

- Landau, L. D., E. M. Lifschitz, 1991: *Hydrodynamik*. Akademie-Verlag Berlin, Kap. VIII, 283-362.
- Lempel, A., 1979: Hadamard and M-Sequence transforms are permutationally similar. *Applied Optics*, **18** (24), 4064-4065.
- L'Espérance, A., P. Herzog, G. A. Daigle, J. R. Nicolas, 1992: Heuristic Model for Outdoor Sound Propagation Based on an Extension of the Geometrical Ray Theory in the Case of a Linear Sound Speed Profile. *Applied Acoustics*, **37**, 111-139.
- L'Espérance, A., J. Nicolas, D. K. Wilson, D. W. Thomson, Y. Gabillet, G. Daigle, 1993: Sound Propagation in the Atmospheric Surface Layer: Comparison of Experiment with FFP Predictions. *Applied Acoustics*, **40**, 325-346.
- Li, K. M. und Q. Wang, 1997: Analytical solutions for outdoor sound propagation in the presence of wind. *J. Acoust. Soc. Am.*, **102** (4), 2040-2049.
- Li, K. M., S. Taherzadeh, K. Attenborough, 1998: An improved ray-tracing algorithm for predicting sound propagation outdoors. *J. Acoust. Soc. Am.*, **104** (4), 2077-2083.
- Liljequist, G. H., K. Cihak, 1984: *Allgemeine Meteorologie*. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 396 S.
- Lim, J. S., 1990: *Two-dimensional Signal and Image Processing*. Prentice Hall PTR, New Jersey, 694 S.
- Lo, T., P. L. Inderwiesen, 1994: *Fundamentals of Seismic Tomographie*. Geophysical Monograph Series, 6, Society of Exploration Geophysicists, U.S.A., 178 S.
- Lüke, H. D., 1986: Folgen mit perfekten periodischen Auto- und Kreuzkorrelationsfunktionen. *Frequenz*, **40** (8), 215-220.
- Lüke, H. D., 1992: *Korrelationssignale*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 308 S.
- Lüke, H. D., 1995: *Signalübertragung*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 381 S.
- Menke, W., 1984: *Geophysical Data Analysis: Discrete inverse theory*. Academic Press, Inc., New York.
- Morfey, C. L., G. P. Howell, 1980: Speed of Sound in air as a function of frequency and humidity. *J. Acoust. Soc. Am.*, **68** (5), 1525-1527.
- Mosegaard, K., M. Sambridge, 2002: Monte Carlo analysis of inverse problems. *Inverse Problems*, **18**, R29-R54.
- Munk, W., P. Worcester, C. Wunsch, 1995: *Ocean Acoustic Tomography*. Cambridge Monographs on Mechanics, Cambridge University Press, U.S.A., 433 S.
- Natterer, F., 2001: *The Mathematics of Computerized Tomography*. Classics in Applied Mathematics, 32, siam (Society for Industrial and Applied Mathematics), Philadelphia, 222 S.

- Nawata, Y., K. Kaneko, 1999: Measurement of Temperature Distribution in Phantom Body by an Ultrasonic CT Method. Proc. 5th ASME/JSME Joint Thermal Engineering Conference, San Diego, California, 8 S.
- Nercessian, A., A. Hirn, A. Tarantola, 1984: Three-dimensional seismic transmission prospecting of the Mont Dore volcano, France. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **76**, 307-315.
- Nijs, L., C. P. A. Wapenaar, 1990: The influence of wind and temperature gradients on sound propagation, calculated with the two-way wave equation. *J. Acoust. Soc. Am.*, **87** (5), 1987-1998.
- Ostashev, V. E., 1997: *Acoustics in Moving Inhomogeneous Media*. E & FN Spon, London, Weinheim, New York, Tokyo, Melbourne, Madras, 259 S.
- Ostashev, V. E., D. Hohenwarter, K. Attenborough, Ph. Blanc-Benon, D. Juvé, G. H. Goedecke, 2001: On the Refraction Law for a Sound Ray in a Moving Medium. *acta acustica - ACUSTICA*, **87**, 303-306.
- Peterson, W. W., 1967: *Prüfbare und korrigierbare Codes*. R. Oldenbourg Verlag München-Wien, 380 S.
- Pichler, H., 1997: *Dynamik der Atmosphäre*. Spektrum, Heidelberg, 572 S.
- Pierce, A. D., 1994: *Acoustics – An Introduction to Its Physical Principles and Applications*. Published by the Acoustical Society of America through the American Institute of Physics, 678 S.
- Piercy, J. E., T. F. W. Embleton, L. C. Sutherland, 1977: Review of noise propagation in the atmosphere. *J. Acoust. Soc. Am.*, **61** (6), 1403-1418.
- Poppe, D., T. Brauers, H.-P. Dorn, M. Karl, T. Mentel, E. Schlosser, R. Tillmann, R. Wegener, A. Wahner, 2007: OH-initiated degradation of several hydrocarbons in the atmosphere simulation chamber SAPHIR. *J. Atmos. Chem.*, **57**, 203-214.
- Puits, R. du, Resagk, C., Thess, A., 2007a: Breakdown of wind in turbulent thermal convection. *Phys. Rev. E*, **75** (1), 016302.
- Puits, R. du, Resagk, C., Tilgner, A., Busse, F. H., Thess, A., 2007b: Structure of thermal boundary layers in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *J. Fluid Mech.*, **572**, 231-254.
- Qiu, X.-L., P. Tong, 2001: Large-scale velocity structures in turbulent thermal convection. *Physical Review E*, **64** (3), 036304, 13 S.
- Raabe, A., K. Arnold, A. Ziemann, 2001: Near surface spatially averaged air temperature and wind speed determined by acoustic travel time tomography. *Meteorol. Z.*, **10** (1), 61-70.
- Raabe, A., K. Arnold, A. Ziemann, 2002: Horizontal Turbulent Fluxes of Sensible Heat and Horizontal Homogeneity in Micrometeorological Experiments. *J. Atmos. Ocean. Technol.*, **19**, 1225-1230.
- Raabe, A., K. Arnold, A. Ziemann, F. Beyrich, J.-P. Leps, J. Bange, P. Zittel, T. Spiess, T. Foken, M. Göckede, M. Schröter, S. Raasch, 2005: STINHO – Structure of turbulent

- transport under inhomogeneous surface conditions – part 1: The micro- $\alpha$  scale field experiment. *Meteorol. Z.*, **14** (3), 315-327.
- Radon, J., 1917: Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. *Berichte Sächs. Akad. Wissensch.*, **29**, 262-277.
- Resagk, C., F. Busse, R. du Puits, A. Thess, A. Tilgner, 2002: The Barrel of Ilmenau: a Novel Facility for Experiments on High Rayleigh Number Convection. In: Castro, I. P., P. E. Hancock, T. G. Thomas (Ed.): *Advances in Turbulence IX*, Proc. 9<sup>th</sup> European Turbulence Conference, Southampton, CIMNE, Barcelona, 515-518.
- Resagk, C., R. du Puits, A. Thess, F. H. Busse, A. Tilgner, 2004: Velocity and temperature measurements in a large-scale Rayleigh-Bénard experiment using LDA and micro thermistors. In: Proc., 12<sup>th</sup> Int. Symp. Appl. Laser Techniques to fluid mechanics, Lisbon.
- Resagk, C., R. du Puits, A. Maystrenko, A. Thess, J. Bosbach, C. Wagner, 2005: Large-Scale Particle Image Velocimetry in Convective Airflow. 6th International Symposium on Particle Image Velocimetry, Pasadena, California, USA.
- Resagk, C., R. du Puits, A. Thess, F. V. Dolzhansky, S. Grossmann, F. F. Araujo, D. Lohse, 2006: Oscillations of the large scale wind in turbulent thermal convection. *Phys. Fluids*, **18** (9), 095105.
- Sachs, J., 1999: Ein neues Breitbandmessverfahren für das Basisband. IEEE Workshop on Short-Range Radar, TU Ilmenau, Germany, 7 S.
- Sachs, J., J. Friedrich, R. Thomä, H. Groppe, 1997: Multisinus versus Maximalfolgen. Fortschritte der Akustik – DAGA 1997, 285-286.
- Salomons, E. M., 2001: *Computational atmospheric acoustics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 335 S.
- SAPHIR, 2005: Forschungszentrum Jülich GmbH, Institut für Chemie und Dynamik der Geosphäre 2: Troposphäre, Jülich. URL: <http://www.fz-juelich.de/icg/icg-2/saphir> (Zugriff: Februar 2008).
- Sarwate, D. V. und M. B. Pursley, 1980: Crosscorrelation Properties of Pseudorandom and Related Sequences. *Proc. IEEE*, **68** (5), 593-619.
- Schienbein, S., K. Arnold, 2001: Messung der Lufttemperatur und Luftfeuchte unter Berücksichtigung des Strahlungsfehlers auf einem Versuchsgelände. *Wiss. Mitt. Inst. f. Meteorol. Uni. Leipzig*, **22**, 69-77.
- Schienbein, S., K. Arnold, 2002: Verbesserung des Strahlenschutzes an einer ventilierten Hütte zum Nachweis von kleinräumigen und kurzzeitigen Veränderungen von Temperatur und relativer Feuchtigkeit. *Wiss. Mitt. Inst. f. Meteorol. Uni. Leipzig*, **26**, 67-72.
- Schlösser, E., B. Bohn, T. Brauers, H.-P. Dorn, H. Fuchs, R. Häsel, A. Hofzumahaus, F. Holland, F. Rohrer, L. O. Rupp, M. Siese, R. Tillmann, A. Wahner, 2007: Intercomparison of Two Hydroxyl Radical Measurement Techniques at the Atmospheric Simulation Chamber SAPHIR. *J. Atmos. Chem.*, **56**, 187-205.

- Schotland, R. M., 1955: The measurement of wind velocity by sonic means. *Journal of Meteorology*, **12**, 386-390.
- Spiesberger, J. L., 1999: Locating animals from their sounds and tomography of the atmosphere: Experimental demonstration. *J. Acoust. Soc. Am.*, **106** (2), 837-846.
- Spiesberger, J. L., K. M. Fristrup, 1990: Passive localization of calling animals and sensing of their acoustic environment using acoustic tomography. *Am. Nat.*, **135**, 107-153.
- Schroeder, M. R., 1979: Integrated-impulse method measuring sound decay without using impulses. *J. Acoust. Soc. Am.*, **66** (2), 497-500.
- Schröter, R., D. Wolff, 1997: Strömungsgeschwindigkeit, Durchfluss und Massenstrom. In: Arbeitskreis der Dozenten für Regelungstechnik (Hrsg.), A. Karbach (Koordination), 1997: Messtechnik in der Versorgungstechnik. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.
- Schrüfer, E., 1992: *Signalverarbeitung – Numerische Verarbeitung digitaler Signale*. Carl Hanser Verlag München Wien, 362 S.
- Seliger, M., 2005: Die Anwendung breitbandiger Signale für ein Messsystem zur akustischen Laufzeitomographie. Diplomarbeit an der Universität Leipzig, Fakultät für Physik und Geowissenschaften.
- Shields, F. D. und H. E. Bass, 1977: Atmospheric absorption of high frequency noise and application to fractional-octave bands. Nasa Contractor Report, Report No.: NASA CR-2760, 234 S.
- Siltanen, S., V. Kolehmainen, S. Järvenpää, J. P. Kaipio, P. Koistinen, M. Lassas, J. Pirttilä; E. Somersalo, 2003: Statistical inversion for medical x-ray tomography with few radiographs: I. General theory. *Phys. Med. Biol.*, **48**, 1437-1463.
- Starke, E., 2004: Verbesserung der akustischen und Signalverarbeitungseigenschaften eines Mess-Systems zur akustischen Laufzeitomographie. Technische Universität Dresden, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik; Bericht Praxissemester (1.10.2003-29.02.2004).
- Steinke, G., W. Hoeg, 1984: Elektroakustik. In: W. Fasold, W. Kraak, W. Schirmer: Taschenbuch Akustik, Band II, 1285-1486.
- Stråhlén, K., 1999: Studies of vector Tomography. Centre for mathematical sciences, Mathematics, faculty of engineering, Lund University Dissertation, 144 S.
- Stull, R. B., 1997: *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 670 S.
- Sutherland, L. C., G. A. Daigle, 1998: Atmospheric Sound Propagation. In: Handbook of Acoustics, Editor: M. J. Crocker, John Wiley & Sons, Inc., 305-329.
- Sweeney, D. W., C. M. Vest, 1973: Reconstruction of Three-Dimensional Refractive Index Fields from Multidirectional Interferometric Data. *Applied Optics*, **12** (11), 2649-2664.

- Tanabe, K., 1971: Projection Method for Solving a Singular System of Linear Equations and its Applications. *Numer. Math.*, **17**, 203-214.
- Tetzlaff, G., K. Arnold, A. Raabe, A. Ziemann, 2002: Observations of area averaged near-surface wind- and temperature-fields in real terrain using acoustic travel time tomography. *Meteorol. Z.*, **11** (4), 273-283.
- Todd, L. A., R. Bhattacharyya, 1997: Tomographic reconstruction of air pollutants: evaluation of measurement geometries. *Applied Optics*, **36** (30), 7678-7688.
- VDI 2714, 1988: Schallausbreitung im Freien. VDI-Richtlinien, 10 S.
- Veit, I., 1988: *Technische Akustik – Grundlagen der physikalischen, physiologischen und Elektroakustik*. VOGEL Buchverlag Würzburg, vierte Auflage, 172 S.
- Vorländer, M., 1994: Anwendungen der Maximalfolgenmesstechnik in der Akustik. Fortschritte der Akustik – DAGA 1994, 83-102.
- Vorländer, M. und H. Bietz, 1995: Der Einfluss von Zeitvarianzen bei Maximalfolgenmessungen. Fortschritte der Akustik – DAGA 1995, 675-682.
- Wenzel, A. R., J. B. Keller, 1971: Propagation of Acoustic Waves in a Turbulent Medium. *J. Acoust. Soc. Am.*, **50** (3), 911-920.
- Wilson, D. K., 2003: The sound-speed gradient and refraction in the near-ground atmosphere. *J. Acoust. Soc. Am.*, **113** (2), 750-756.
- Wilson, D. K., D. W. Thomson, 1994: Acoustic Tomographic Monitoring of the Atmospheric Surface Layer. *J. Atmos. Ocean. Technol.*, **11** (3), 751-769.
- Wilson, D. K., A. Ziemann, V. E. Ostashev, A. G. Voronovich, 2001: An Overview of Acoustic Travel-Time Tomography in the Atmosphere and its Potential Application. *acta acustica - ACUSTICA*, **87**, 721-730.
- Wilson, D. K., J. M. Noble, M. A. Coleman, 2003: Sound Propagation in the Nocturnal Boundary Layer. *Journal of the atmospheric Sciences*, **60**, 2473-2486.
- Wong, G. S. K., 1986: Speed of sound in standard air. *J. Acoust. Soc. Am.*, **79** (5), 1359-1366.
- Wong, G. S. K., T. F. W. Embleton, 1985: Variation of the speed of sound in air with humidity and temperature. *J. Acoust. Soc. Am.*, **77** (5), 1710-1712.
- Xiang, N., 1992: Using M-sequences for determining the impulse responses of LTI-systems. *Signal Processing*, **28**, 139-152.
- Xiang, N. und M. R. Schroeder, 2003: Reciprocal maximum-length sequence pairs for acoustical dual source measurements. *J. Acoust. Soc. Am.*, **113** (5), 2754-2761.
- Xiang, N., J. N. Daigle, M. Kleiner, 2005: Simultaneous acoustic channel measurements via maximal-length-related sequences. *J. Acoust. Soc. Am.*, **117** (4), 1889-1894.
- Yarlagadda, R. K. und J. E. Hershey, 1997: *Hadamard Matrix Analysis and Synthesis*. Kluwer Academic Publishers Boston Dordrecht London, 123 S.
- Ziemann, A., 2000: Eine theoretische Studie zur akustischen Tomographie in der atmosphärischen Grenzschicht. *Wiss. Mitteilungen aus dem Institut für Meteorologie der*

---

*Universität Leipzig und dem Institut für Troposphärenforschung e.V. Leipzig, 19, Dissertation, 137 S.*

Ziemann, A., K. Arnold, A. Raabe, 1999: Acoustic travel time tomography. A method for remote sensing of the atmospheric surface layer. *Meteorol. Atmosph. Phys.*, **71**, 43-51.

Ziemann, A., K. Arnold, A. Raabe, 2001: Acoustic tomography as a method to identify small-scale land surface characteristics. *acta acustica - ACUSTICA*, **87**, 731-737.

Ziemann, A., K. Arnold, A. Raabe, 2002: Acoustic Tomography as a Remote Sensing Method to Investigate the Near-Surface Atmospheric Boundary Layer in Comparison with In Situ Measurements. *J. Atmos. Ocean. Technol.*, **19**, 1208-1215.

# Wichtige Formelzeichen und Symbole

## Lateinische Buchstaben

Symbol	Einheit	Beschreibung
$c$	$\text{m s}^{-1}$	Schallgeschwindigkeit
$c_{\text{eff}}$	$\text{m s}^{-1}$	effektive Schallgeschwindigkeit
$c_L$	$\text{m s}^{-1}$	Laplace'sche Schallgeschwindigkeit – Ausbreitungsgeschwindigkeit akustischer Signale in ruhender Luft
$c_p$	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck
$c_v$	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen
$d$	$\text{m}$	geometrischer Abstand zwischen Sender und Empfänger
$e$	$\text{Pa}$	Partialdruck des Wasserdampfes
$E(f)$		Betragsspektrum (auch als Energie-, Amplituden-, Powerspektrum bezeichnet)
$\mathbf{e}_l$		Einheitsvektor in $l$ -Richtung
$f$	$\text{Hz}$	Frequenz
$F(k_x, k_y)$		Fouriertransformierte (zweidimensional) von $f(x, y)$
$f_{\text{dig}}$	$\text{Hz}$	Abtastfrequenz, Digitalisierungsfrequenz
$f_j$		Gitterzellenwert in der $j$ -ten Zelle
$f_N$	$\text{Hz}$	Nyquistfrequenz
$\mathbf{f}$		Vektor aller $J$ Gitterzellenwerte $f_j$
$\mathbf{f}^{\text{est}}$		geschätzte Verteilung für die iterative Rekonstruktion
$\mathbf{f}^{\text{init}}$		Anfangsverteilung für die iterative Rekonstruktion
$\mathbf{f}^{\text{true}}$		wahre Verteilung innerhalb des Tomographiegitters
$H(f)$		Fouriertransformierte der zeitkontinuierlichen Funktion $h(t)$
$H_{\text{imag}}$		Imaginärteil der komplexwertigen Funktion $H$
$H_{\text{real}}$		Realteil der komplexwertigen Funktion $H$
$\mathbf{H}_{n+1}$		Hadamard-Matrix



Symbol	Einheit	Beschreibung
$I$		Anzahl der Messstrecken
$J$		Anzahl der Gitterzellen für die tomographische Rekonstruktion
$k_{x,y,s}$	$m^{-1}$	Wellenzahl in $x$ -, $y$ -, $s$ -Richtung
$\underline{\mathbf{L}}$	m	Matrix aller $I \times J$ Strahlstücklängenabschnitte $l_{ij}$
$\underline{\mathbf{L}}^{-g}$	$m^{-1}$	generalisierte Inverse der Matrix $\underline{\mathbf{L}}$
$\underline{\mathbf{L}}^T$	m	transponierte Matrix von $\underline{\mathbf{L}}$
$l$	m	Signallaufweg
$l_i$	m	Gesamtlänge des $i$ -ten Strahls
$l_{ij}$	m	Strahlstücklängenabschnitt des $i$ -ten Strahls innerhalb der $j$ -ten Gitterzelle
$L_p$	dB	Schalldruckpegel
$M$	$kg\ mol^{-1}$	molare Masse
$N$		Anzahl der Datenpunkte eines Signals – Länge des Signals
$p$	Pa	Luftdruck des Gasgemischs
$\underline{\mathbf{P}}_{1,2}$		Permutationsmatrix zum Vertauschen von Zeilen, Spalten
$p_i$		Messwert entlang des $i$ -ten Strahls
$\mathbf{p}$		Vektor aller $I$ Messwerte $p_i$
$\mathbf{p}^{obs}$		gemessene Strahlwerte
$\mathbf{p}^{pre}$		mittels Vorwärtsmodellierung aus geschätzter Verteilung berechnete Strahlwerte
$P_r$		Prandtl-Zahl
$q$	$kg\ kg^{-1}$	spezifische Feuchte
$Ra$		Rayleigh-Zahl
$\underline{\mathbf{R}}_D$		Datenauflösungsmatrix
$r.H.$	%	relative Feuchte
$\underline{\mathbf{R}}_M$		Modellauflösungsmatrix
$r_{PAKF}$		periodische Autokorrelationsfunktion
$R_s$	$J\ kg^{-1}\ K^{-1}$	spezifische Gaskonstante

Symbol	Einheit	Beschreibung
$r_{x,y}$		Kreuzkorrelationsfunktion
$\text{si } x$		Spaltfunktion
$T$	K	absolute Temperatur
$t$		Zeit
$T_{\text{av}}$	K	akustisch virtuelle Temperatur
$t_{\text{Sig}}$		Signaldauer
$u(x_i)$		Messunsicherheit der Größe $x_i$
$\mathbf{v}$	$\text{m s}^{-1}$	Strömungsgeschwindigkeit, Windgeschwindigkeit
$\text{Vol}_i$		Volumenteil eines Stoffes $i$ in einem Gemisch
$v_{\text{Strahl}}$	$\text{m s}^{-1}$	Strömungskomponente entlang Schallstrahl
$w_j$		Wichtungsfaktoren
$X$		Fouriertransformierte der Funktion $x$
$X^*$		konjugiert Komplexes von $X$
$X_k$		Fouriertransformierte der zeitdiskreten Funktion $x_n$

### Griechische Buchstaben

Symbol	Einheit	Beschreibung
$\gamma$		Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten bei konstantem Druck ( $c_p$ ) und konstantem Volumen ( $c_v$ )
$\Gamma_{\text{RB}}$		Aspektverhältnis bei Rayleigh-Bénard-Konvektion
$\Delta$		Laplace-Operator
$\delta(x)$		Delta-Distribution
$\Delta f$	Hz	Frequenzschritt
$\delta f$		euklidischer Abstand bezüglich $f$
$\Delta^i f_j$		Verbesserung der Lösung algebraischer Techniken innerhalb der $j$ -ten Gitterzelle in Abhängigkeit vom $i$ -ten Strahl

Symbol	Einheit	Beschreibung
$r_{x,x}$		Autokorrelationsfunktion
$\Delta t$		Zeitschritt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Signalwerten, Abtastrate
$\Delta t_S$		Zeitschritt eines interpolierten Signals
$\vartheta$	°C	Temperatur
$\lambda$	m	Wellenlänge
$\rho$	kg m <sup>-3</sup>	Dichte
$\sigma$		Standardabweichung
$\sigma^2$		Varianz
$\tau$		zeitliche Verschiebung bei Korrelation, Signallaufzeit
$\omega$	rad s <sup>-1</sup>	Kreisfrequenz

### Symbole

Symbol	Beschreibung
$\nabla$	Nabla-Operator
$\oplus_2$	Addition modulo 2
$\otimes_2$	Multiplikation modulo 2
mod $N$	Rest nach Division durch $N$

### Indizes

Symbol	Beschreibung
<i>bin</i>	binärwertige Zahlendarstellung
<i>dez</i>	Dezimalzahlendarstellung (zur deutlichen Abgrenzung bzgl. binärer Darstellung)
<i>i</i>	Messwert

Symbol	Beschreibung
$j$	Zellenwert
tr	trockene Luft
w	Wasserdampf
f	feuchte Luft
Mix	Gemisch aus verschiedenen Gasbestandteilen

# Konstanten und Stoffeigenschaften

$c_{p,w}$	$1864,6 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
$c_{p,tr}$	$1004,7 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
$c_{v,w}$	$1403,1 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
$c_{v,tr}$	$717,7 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
$J_0$	$10^{-12} \text{ W m}^{-2}$
$M_{Ar}$	$39,948 \text{ kg kmol}^{-1}$
$M_{CO_2}$	$44,0100 \text{ kg kmol}^{-1}$
$M_{O_2}$	$31,9988 \text{ kg kmol}^{-1}$
$p_0'$	$2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
$R^*$	$8,314510 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
$R_{tr}$	$287,05 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
$R_w$	$461,52 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$



# Abkürzungen

ADC	Analog-to-Digital-Converter (Analog-zu-Digital-Wandler)
AGS	atmosphärische Grenzschicht
AKF	Autokorrelationsfunktion
AM	algebraische Methoden (zur tomographischen Rekonstruktion)
FFT	schnelle Fouriertransformation (Fast Fourier Transformation)
FHT	schnelle Hadamardtransformation (Fast Hadamard Transformation)
FT	Fouriertransformation
FTM	Fourier-Transform-Methoden (zur tomographischen Rekonstruktion)
ICP	Integrated Circuit Piezoelectric
KKF	Kreuzkorrelationsfunktion
LDA	Laser Doppler Anemometrie
MLS	Maximallängenfolge (Maximum Length Sequence)
PAKF	periodische Autokorrelationsfunktion
PIV	Particle Image Velocimetrie
RB-Zelle	Rayleigh-Bénard-Zelle
S/N	Signal zu Rausch Verhältnis
SIRT	simultane iterative Rekonstruktionstechnik
THD	Total Harmonic Distortion (harmonische Gesamtverzerrung)





# Anhang A – Berechnung der Permutationsmatrizen zur Durchführung der FHT

Im Folgenden soll die Bestimmung der Permutationsmatrizen  $\underline{\mathbf{P}}_1$  und  $\underline{\mathbf{P}}_2$  (vgl. Kapitel 3.4.2) zur Anwendung der schnellen Hadamardtransformation an einem Beispiel für eine Maximallängensequenz vom Grad 3 ( $m=3$ ) verdeutlicht werden. Ausgangspunkt soll die Folge nach Gleichung (3.26),  $s(n) = (1,0,0,1,1,1,0)$ , sein. Als Signalmatrix (vgl. (3.36)) ergibt sich hieraus

$$\underline{\mathbf{X}}_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Die Permutationsmatrix  $\underline{\mathbf{P}}_1$  kann aus den Binärwerten der ersten 3 Zeilen ( $m=3$ ) von  $\underline{\mathbf{X}}_7$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{bin} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{bin}^T = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}_{dez} \quad (\text{A.2})$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbf{P}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

bestimmt werden.

$\underline{\mathbf{P}}_2$  kann nun aus den Binärwerten der Spalten 1, 2 und 4 (in abfallender Reihenfolge) der Signalmatrix entsprechend der Spaltenreihenfolge nach  $\underline{\mathbf{P}}_1$  berechnet werden

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{bin} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 6 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}_{dez} \Rightarrow \underline{\mathbf{P}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Die Berechnung von  $\underline{\mathbf{G}}_7$  aus der Signalmatrix nach Gleichung (3.42) unter Verwendung der Permutationsmatrizen  $\underline{\mathbf{P}}_1$  und  $\underline{\mathbf{P}}_2$  ergibt

$$\underline{\mathbf{G}}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Dies entspricht der Hadamard-Matrix  $\underline{\mathbf{H}}_8$ , vermindert um die erste Zeile und Spalte.

## Anhang B – Rekonstruktion simulierter Vektorfelder

Auf den folgenden beiden Doppelseiten sind beispielhafte Rekonstruktionen simulierter Strömungsfelder dargestellt. Die Graphiken enthalten jeweils das rekonstruierte Feld (schwarze Pfeile) sowie das vorgegebene (simulierte) Strömungsfeld, dessen Werte auf die räumliche Auflösung der Rekonstruktionsergebnisse interpoliert wurden (graue Pfeile). Die Rekonstruktionsergebnisse unterscheiden sich hinsichtlich der Anzahl der Iterationsschritte bis zum Abbruch des iterativen Rekonstruktionsalgorithmus sowie in der Wahl der Kopplung benachbarter Gitterzellen bei dem iterativen Lösungsprozess. Die Wichtungsfaktoren für die Mittelung wurden im Bereich zwischen 0,0 (keine Kopplung zwischen den Gitterzellenwerten) und 1,0 (starke Kopplung) variiert.

Für den Vergleich wurden zwei Strömungsfelder ausgewählt. Zum einen ein homogenes Strömungsfeld und zum anderen ein Wirbelfeld. Die Ausdehnung des Tomographiegebietes beträgt  $2\text{ m} \times 2\text{ m}$ . Die Anordnung der Schallsender und Empfänger entspricht der linken Darstellung in Abbildung 29.

Das simulierte homogene Strömungsfeld ist durch eine konstante Strömungsgeschwindigkeit im gesamten Untersuchungsgebiet charakterisiert. Die Strömung tritt am linken Rand in das Messareal ein und verlässt es am rechten Rand wieder. Die Komponenten des Strömungsfeldes lauten  $v_x = 1,2\text{ m s}^{-1}$  und  $v_y = 0,0\text{ m s}^{-1}$ .

Ein Strömungswirbel charakterisiert das simulierte Wirbelfeld. Die Berechnung der Strömungskomponenten erfolgte nach Gleichung (5.19), wobei das Zentrum des Wirbels im Mittelpunkt des Untersuchungsgebietes, bei  $\mathbf{r}_0 = (1\text{ m}, 1\text{ m})$ , liegt und die Zirkulation  $\Gamma = -5\text{ m}^2\text{ s}^{-1}$  beträgt.

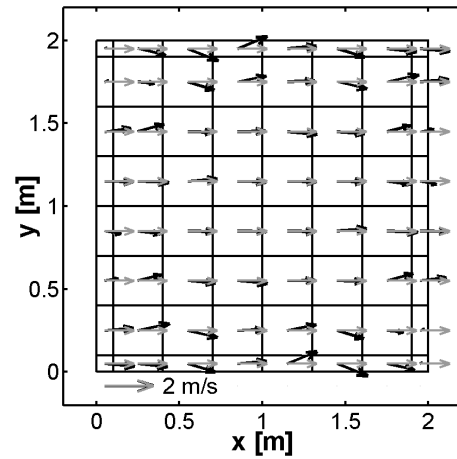
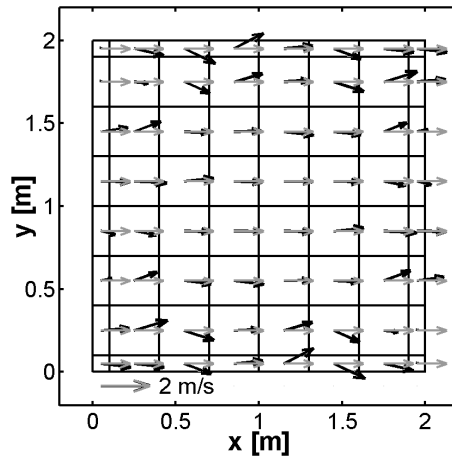
## Homogenes Strömungsfeld

Wichtungsfaktor

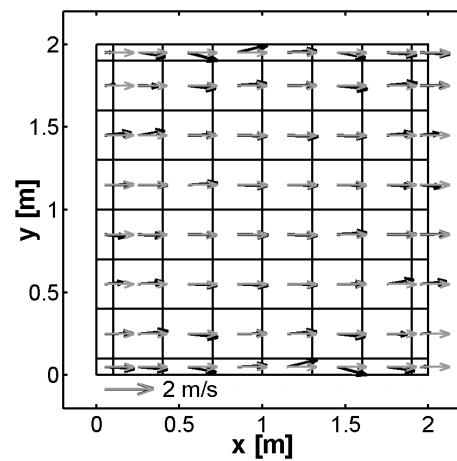
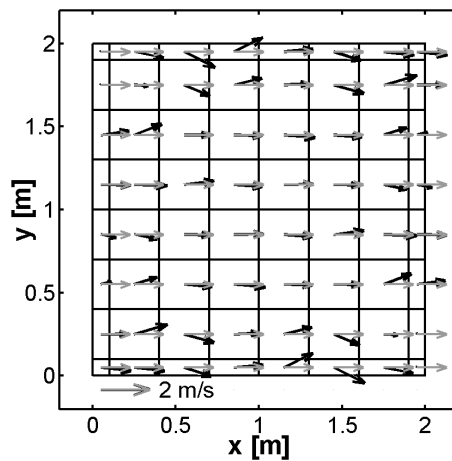
0,0 (ohne Mittelung)

0,01 (schwache Kopplung)

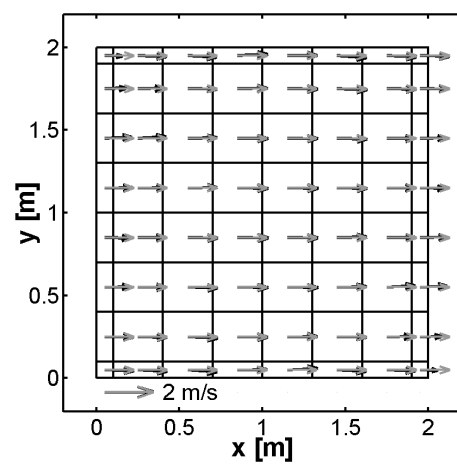
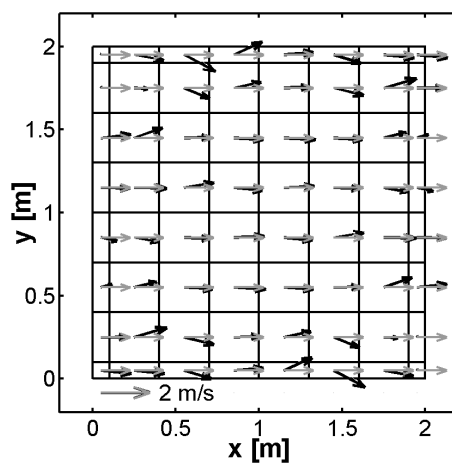
nach 5 Iterationsschritten



nach 15 Iterationsschritten



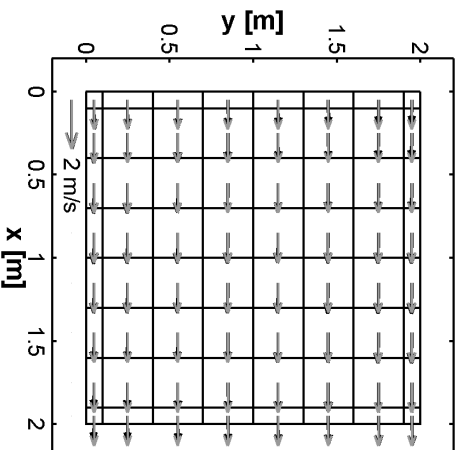
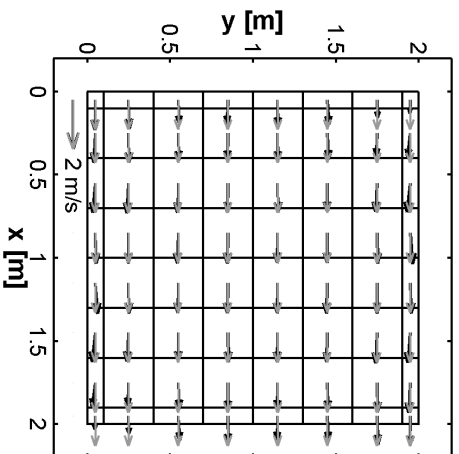
nach 50 Iterationsschritten



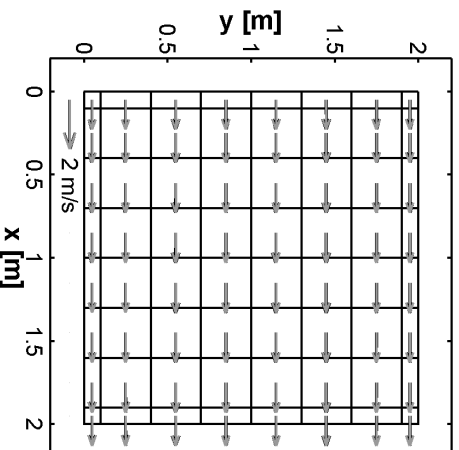
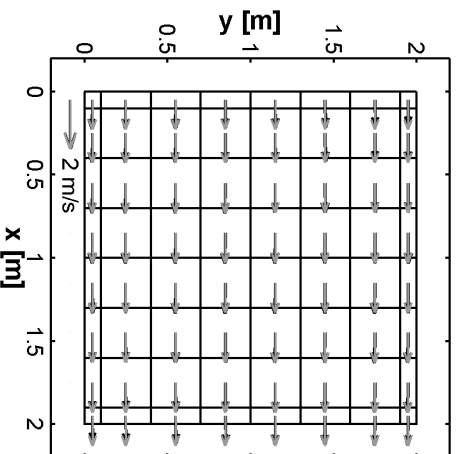
0,10

1,0 (starke Kopplung)

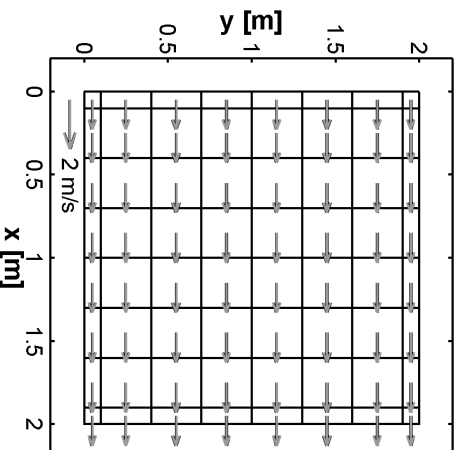
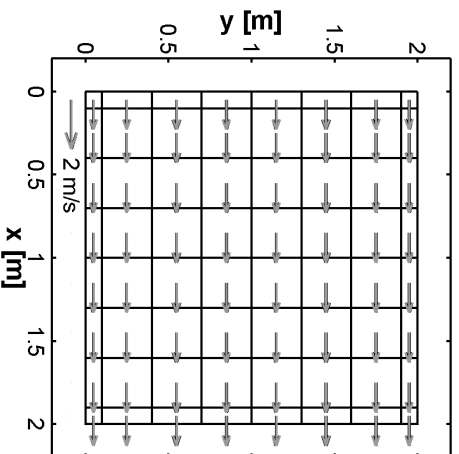
Wichtungs-  
faktor



nach 5 Iterationsschritten



nach 15 Iterationsschritten



nach 50 Iterationsschritten

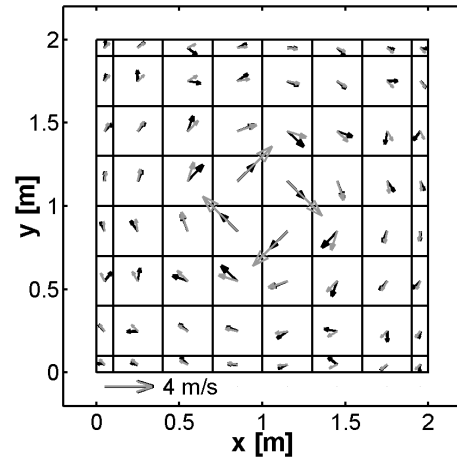
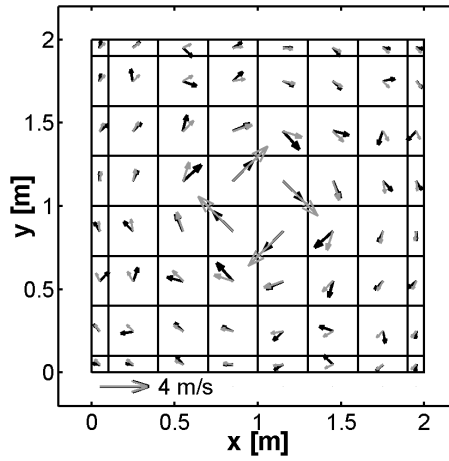
## Wirbelfeld

Wichtungsfaktor

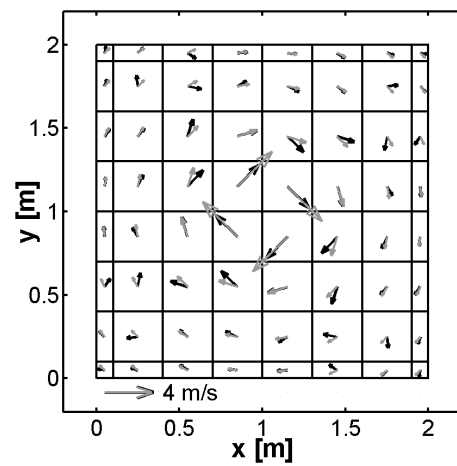
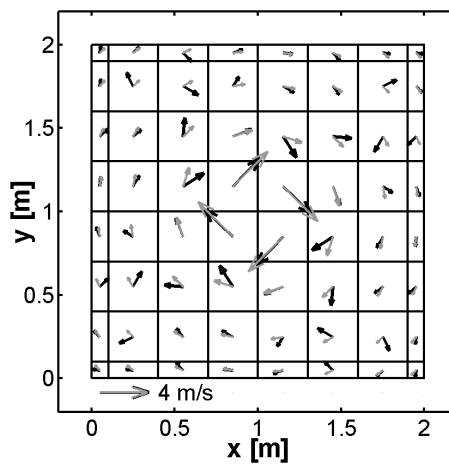
0,0 (ohne Mittelung)

0,01 (schwache Kopplung)

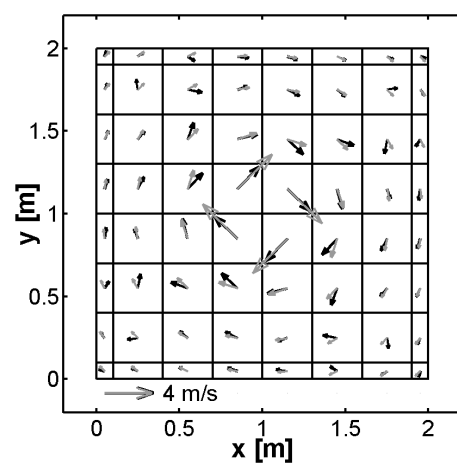
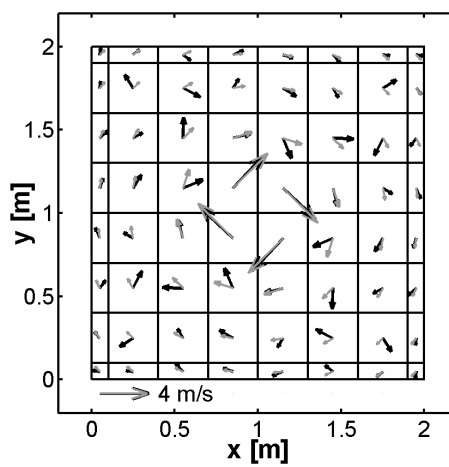
nach 5 Iterationsschritten



nach 15 Iterationsschritten



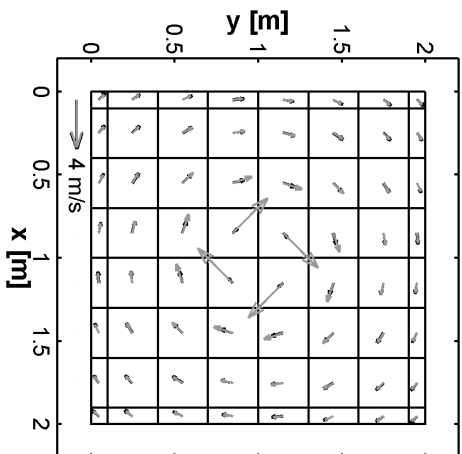
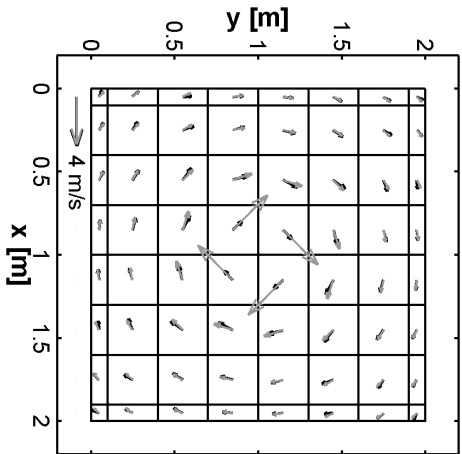
nach 50 Iterationsschritten



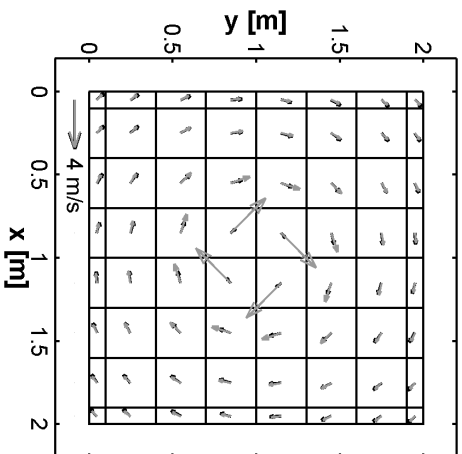
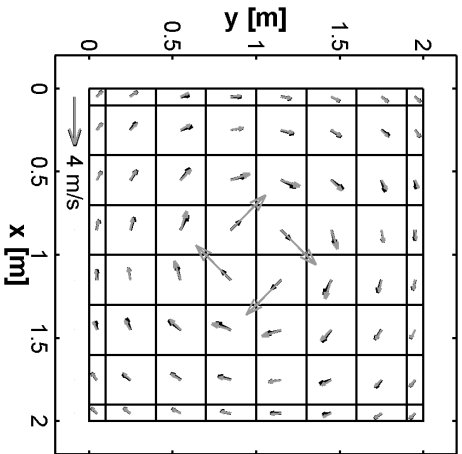
0,10

1,0 (starke Kopplung)

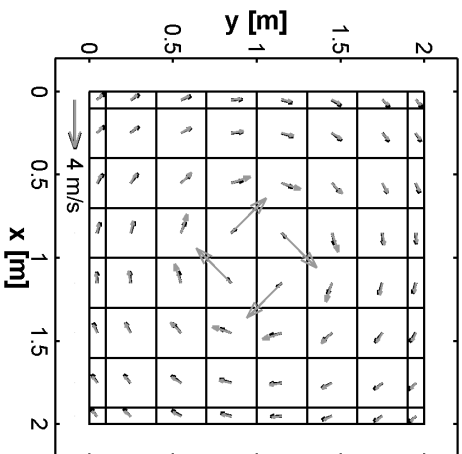
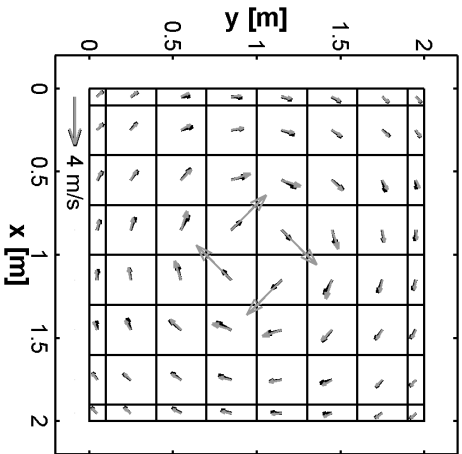
Wichtungs-  
faktor



nach 5 Iterationsschritten



nach 15 Iterationsschritten



nach 50 Iterationsschritten





## Anhang C – Simulation eines akustischen Dipols

In Kapitel 2.1 wurde eine allgemeine Lösung der Wellengleichung für die Druckabhängigkeit bei der Schallausbreitung für ebene Wellen dargestellt (Gleichung (2.10)). Die Lösung beruhte auf einer geradlinigen Schallausbreitung mit räumlich konstanter Amplitude. Betrachtet man Punktschallquellen, so breitet sich der Schall kugelförmig um die Schallquelle aus, wenn sich das Medium selbst in Ruhe befindet. Eine Lösung der Wellengleichung für ein solches kugelsymmetrisches Problem ist gegeben durch (Kuttruff, 2004)

$$\underline{p}' = \frac{i\omega \underline{p}_{pk}}{|\mathbf{r}|} \cdot e^{i[\omega t - k_r r]}, \quad (\text{C.1})$$

wobei  $k_r$  die Wellenzahl in radialer Richtung und  $\underline{p}_{pk}$  eine konstante (im Allgemeinen komplexwertige) Amplitude beschreibt, welche von der Quellenstärke und der mittleren Luftdichte abhängt.

Die Simulation des ungestörten Dipolfeldes in Abhängigkeit vom Raumwinkel  $\psi$  und der Entfernung  $r$  vom Dipolmittelpunkt erfolgt nun durch Superposition der Schallfelder zweier Punktschallquellen. Der gewählte Abstand entspricht mit 0,04 m etwa der geometrischen Anordnung der Lautsprecher in den Lautsprechertürmen. Die Entfernungen zwischen Messpunkt und Punktschallquellen werden mit  $r_1$  bzw.  $r_2$  bezeichnet (vgl. Abbildung 66). Bei gleichartigen Punktschallquellen ( $p_{pk,1} = p_{pk,2}$ ) kann das Schallfeld einer solchen Dipolanordnung beschrieben werden durch

$$\underline{p}' = \underline{p}'_1 + \underline{p}'_2 = i\omega \underline{p}_{pk} \left[ \frac{e^{-ik_r r_1}}{|\mathbf{r}_1|} + \frac{e^{-ik_r r_2}}{|\mathbf{r}_2|} \right] e^{i\omega t}. \quad (\text{C.2})$$

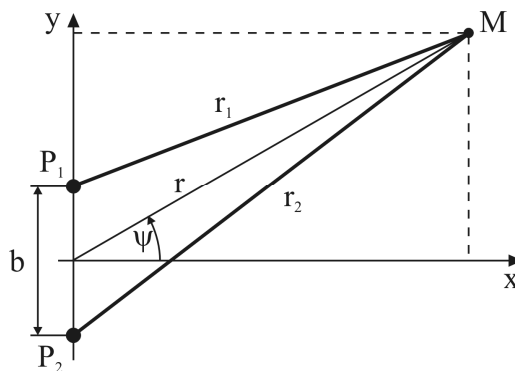


Abbildung 66: Schematische Darstellung eines akustischen Dipols bestehend aus zwei Punktschallquellen  $P_1$  und  $P_2$  im Abstand  $b$ . Der Messpunkt  $M$  befindet sich in einer Entfernung  $r$  vom Mittelpunkt des Dipols.

Die Berechnung des Schallfeldes erfolgte entsprechend den Messungen im reflexionsarmen Raum in einem Winkelbereich von  $\psi = -180^\circ$  bis  $\psi = 180^\circ$  in Schritten von  $15^\circ$ . Der Abstand zum Mittelpunkt des Dipols beträgt entsprechend der Messungen 1,1 m. Die Simulation erfolgte stationär (zeitunabhängig). Zur Darstellung der Richtungsabhängigkeit wurde wiederum das Richtungsmaß (Gleichung (6.2)) berechnet, wobei als Bezugsschalldruck die Abstrahlung in horizontaler Ebene betrachtet wurde.

Das Ergebnis der Simulation ist in Abbildung 67 dargestellt. Eine Ähnlichkeit zu den gemessenen Werten ist deutlich erkennbar. Abweichungen sind im Wesentlichen dem hohen Abstraktionsgrad der Simulation zuzuschreiben, welche auf idealen Punktstrahlern und einer ungestörten Schallausbreitung (ohne Reflexionskörper und mechanischen Halterungen) beruht.

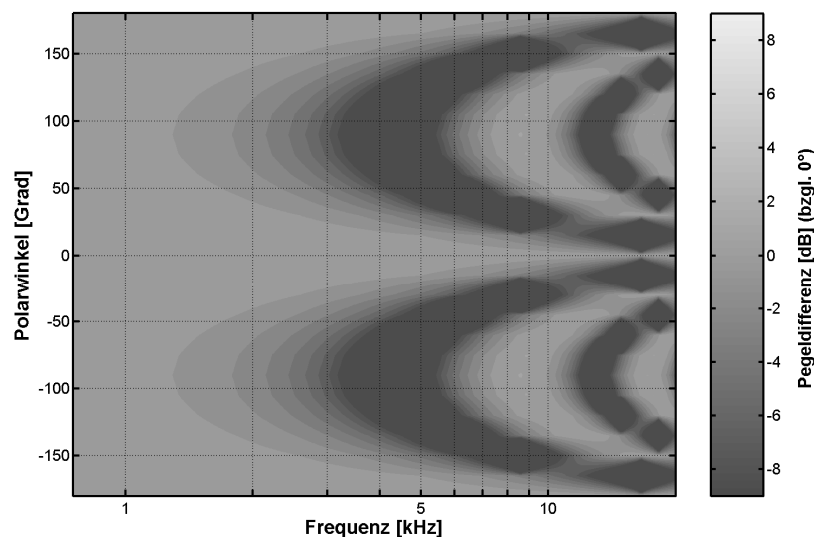


Abbildung 67: Richtungsmaß für verschiedene Frequenzen und Raumwinkel in der vertikalen Ebene für eine theoretische Dipolanordnung von Einzellausprechern in einem Abstand von 40 mm.

Sowohl die Simulationen als auch die Messungen der vertikalen Richtcharakteristik zeigen deutliche Abweichungen der frequenzabhängigen Schalldruckpegel im Vergleich zur horizontalen Abstrahlrichtung. Die Schallabstrahlung muss daher als gerichtet bezeichnet werden.





# Dank

Für die Betreuung dieser Arbeit, das Interesse an neuen Entwicklungen, für zahlreiche Hinweise und Diskussionen sowie die Begutachtung dieser Arbeit danke ich Prof. Dr. G. Tetzlaff.

Weiterhin möchte ich Prof. Dr. P. Holstein und Prof. Dr. A. Thess herzlich für die Begutachtung der Arbeit danken.

Dr. K. Arnold, Dr. A. Raabe und Jun.-Prof. Dr. A. Ziemann danke ich für die Hinführung zur akustischen Laufzeittomographie. Sie standen während der Bearbeitungszeit stets für Fragen zu experimentellen oder theoretischen Betrachtungen zur Verfügung. Ihr Interesse an der Arbeit und deren Fortgang sowie zahlreiche Anregungen haben wesentlich zum Gelingen beigetragen. Des Weiteren möchte ich mich für die tatkräftige Unterstützung bei den durchgeführten Experimenten bedanken.

Die Optimierung der Hardware sowie deren Einbindung in die Programmierumgebung MATLAB erfolgten im Wesentlichen im Rahmen einer Kooperation mit der SINUS Messtechnik GmbH Leipzig. Für die gute und effektive Zusammenarbeit möchte ich G. Papsdorf und insbesondere Prof. Dr. P. Holstein danken. Der Glaube versetzt Berge. Weiterhin danke ich M. Schatz für das geduldige Beantworten all meiner Fragen zu Funktionsweise und Ansteuerung der akustischen Messkarte sowie die stete Bereitschaft, mich bei Problemen zu unterstützen. Ebenfalls danken möchte ich R. Müller, der immer eine Antwort auf Fragen zu technischen Details wusste sowie H. Weinhold für den Bau der mechanischen Lautsprecherkomponenten.

E. Starke danke ich für eine produktive Zusammenarbeit hinsichtlich der akustischen Komponenten des tomographischen Systems im Rahmen seines Praxissemesters.

Für die freundliche Unterstützung bei der Anwendung des akustisch tomographischen Messsystems in der Atmosphärensimulationskammer SAPHIR möchte ich Dr. T. Brauers danken. Danke ebenfalls an D. Daniel, der die Messung vor Ort betreute.

Eine Messung im Ilmenauer Fass wäre nicht ohne die Unterstützung von Prof. Dr. A. Thess, Dr. R. du Puits und Dr. C. Resagk möglich gewesen. Danke hierfür. Ebenfalls gedankt sei für die geduldige Beantwortung meiner Fragen rund um das Ilmenauer Fass. Mein Dank gilt weiterhin M. Seliger, der während der Messungen in Ilmenau verharrte.

Des Weiteren danke ich M. Wilsdorf, Dr. H. Scheidt sowie A. Huppelsberg für die kritische Durchsicht von Teilen des Manuskriptes, für zahlreiche konstruktive Hinweise und motivierende Worte.

Darüber hinaus gilt mein Dank allen noch nicht namentlich genannten Mitarbeitern des Instituts für Meteorologie der Universität Leipzig für das angenehme Arbeitsklima und die Hilfe, wenn Hilfe nötig war.

Bedanken möchte ich mich ebenfalls für die finanzielle Unterstützung: Teile der Arbeit wurden im Rahmen der Technologieförderung mit Mitteln des Europäischen Fonds für regionale Entwicklungen (EFRE) 2000-2006 und mit Mitteln des Freistaates Sachsen gefördert sowie in Form eines Promotionsstipendiums aus Mitteln des Hochschul- und Wissenschaftsprogramms des Sächsischen Staatsministeriums für Wissenschaft und Kunst.

Und nicht zuletzt danke ich meiner Familie für die permanente Unterstützung und für die Ebung des Weges zu dieser Arbeit.

## Wissenschaftliche Mitteilungen aus dem Institut für Meteorologie der Universität Leipzig

- Band 1      *A. Raabe, G. Tetzlaff und W. Metz* (Edn.), 1995: Meteorologische Arbeiten aus Leipzig I
- Band 2      *R. Devantier*, 1995: Wolkenbildungsprozesse über der südwestlichen Ostsee - Anwendungen eines neuen Wolkenschemas in einem mesoskaligen Modell
- Band 3      *J. Laubach*, 1996: Charakterisierung des turbulenten Austausches von Wärme, Wasserdampf und Kohlendioxid über niedriger Vegetation anhand von Eddy-Korrelations-Messungen
- Band 4      *A. Raabe und J. Heintzenberg* (Edn.), 1996: Meteorologische Arbeiten aus Leipzig II
- Band 5      Wind- und Seegangs atlas für das Gebiet um Darß und Zingst  
*D. Hinneburg, A. Raabe und G. Tetzlaff*, 1997: Teil I: Windatlas
- Band 6      *W. von Hoyningen-Huene und G. Tetzlaff* (Edn.), 1997: Sediment and Aerosol  
Teil I: Beiträge zur Alfred-Wegener-Konferenz, Leipzig 1997  
Teil II: Aktuelle Beiträge aus dem Institut für Meteorologie
- Band 7      *B.-R. Beckmann*, 1997: Veränderungen in der Windklimatologie und in der Häufigkeit von Sturmhochwassern an der Ostseeküste Mecklenburg-Vorpommerns
- Band 8      *P. Posse*, 1997: Bestimmung klimarelevanter Parameter des maritimen Aerosols unter besonderer Berücksichtigung der Nichtkugelform realer Aerosolteilchen
- Band 9      *A. Raabe, K. Arnold und J. Heintzenberg* (Edn.), 1998: Meteorologische Arbeiten aus Leipzig III
- Band 10     Wind- und Seegangs atlas für das Gebiet um Darß und Zingst, Teil II, 1998:  
*D. Hinneburg, A. Raabe und G. Tetzlaff*: Vergleich Windatlas – Beobachtungsdaten; *M. Börngen, H.-J. Schönfeldt, F. Riechmann, G. Panin und G. Tetzlaff*: Seegangs atlas; *M. Stephan und H.-J. Schönfeldt*: Sedimenttransport atlas
- Band 11**    ***J. Rissmann*, 1998: Der Einfluss langwelliger Strahlungsprozesse auf das bodennahe Temperaturprofil**
- Band 12     *A. Raabe, K. Arnold und J. Heintzenberg* (Edn.), 1999: Meteorologische Arbeiten aus Leipzig IV
- Band 13     *U. Müller, W. Kuttler und G. Tetzlaff* (Edn.), 1999: Workshop Stadtklima 17. / 18. 02. 1999 in Leipzig
- Band 14     *R. Surkow*, 1999: Optimierung der Leistungsverfügbarkeit von Windenergie durch ihre Integration in Wind-Biogas-Hybridanlagen
- Band 15     *N. Mölders*, 1999: Einfache und akkumulierte Landnutzungsänderungen und ihre Auswirkungen auf Evapotranspiration, Wolken- und Niederschlagsbildung
- Band 16     *G. Tetzlaff und U. Grünwald* (Edn.), 1999:  
2. Tagung des Fachausschusses Hydrometeorologie 15./16. 11. 1999 in Leipzig
- Band 17     *A. Raabe und K. Arnold* (Edn.), 2000: Meteorologische Arbeiten aus Leipzig V
- Band 18     *K. Arnold*, 2000: Ein experimentelles Verfahren zur Akustischen Tomographie im Bereich der atmosphärischen Grenzschicht
- Band 19     *A. Ziemann*, 2000: Eine theoretische Studie zur akustischen Tomographie in der atmosphärischen Grenzschicht
- Band 20     *Ch. Jacobi*, 2000: Midlatitude mesopause region dynamics and its coupling with lower and middle atmospheric processes
- Band 21     *M. Klingspohn*, 2000: Interdekadische Klimavariabilität über dem Nordatlantik – Statistische Analysen und Modellstudien –
- Band 22     *A. Raabe und K. Arnold* (Edn.), 2001: Meteorologische Arbeiten aus Leipzig VI
- Band 23     *K. Arnold, A. Ziemann, G. Tetzlaff, V. Mellert und A. Raabe* (Edn.), 2001: International Workshop Tomography and Acoustics: Recent developments and methods 06. - 07.03.2001 in Leipzig

- Band 24 *O. Fanenbruck*, 2001: Ein thermophysiologisches Bewertungsmodell mit Anwendung auf das Leipziger Stadtgebiet
- Band 25 *M. Lange*, 2001: Modellstudien zum CO<sub>2</sub>-Anstieg und O<sub>3</sub>-Abbau in der mittleren Atmosphäre und Einfluß des Polarwirbels auf die zonale Symmetrie des Windfeldes in der Mesopausenregion
- Band 26 *A. Raabe und K. Arnold* (Edn.), 2002: Meteorologische Arbeiten aus Leipzig VII
- Band 27 *M. Simmel*, 2002: Ein Modul zur spektralen Beschreibung von Wolken und Niederschlag in einem Mesoskalenmodell zur Verwendung auf Parallelrechnern
- Band 28 *H. Siebert*, 2002: Tethered-Balloon Borne Turbulence Measurements in the Cloudy Boundary Layer
- Sonderband *G. Tetzlaff* (Hrsg.), 2002:- Atmosphäre - Aktuelle Beiträge zu Luft, Ozon, Sturm, Starkregen und Klima
- Band 29 *U. Harlander*, 2003: On Rossby wave propagation in atmosphere and ocean
- Band 30 *A. Raabe und K. Arnold* (Edn.), 2003: Meteorologische Arbeiten aus Leipzig VIII
- Band 31 *M. Wendisch*, 2003: Absorption of Solar Radiation in the Cloudless and Cloudy Atmosphere
- Band 32 *U. Schlink*, 2003: Longitudinal Models in Biometeorology: Effect Assessment and Forecasting of Ground-level Ozone
- Band 33 *H. Heinrich*, 2004: Finite barotrope Instabilität unter synoptischem Antrieb
- Band 34 *A. Raabe und K. Arnold* (Edn.), 2004: Meteorologische Arbeiten aus Leipzig IX
- Band 35 *C. Stolle*, 2004: Three-dimensional imaging of ionospheric electron density fields using GPS observations at the ground and onboard the CHAMP satellite
- Band 36 *A. Raabe und K. Arnold* (Edn.), 2005: Meteorologische Arbeiten (X) und Jahresbericht 2004 des Institutes für Meteorologie der Universität Leipzig
- Band 37 *A. Raabe und K. Arnold* (Edn.), 2006: Meteorologische Arbeiten (XI) und Jahresbericht 2005 des Institutes für Meteorologie der Universität Leipzig
- Band 38 *K. Fröhlich*, 2006: The Quasi Two-Day Wave – its impact on zonal mean circulation and wave-wave interactions in the middle atmosphere
- Band 39 *K. Radtke*, 2006: Zur Sensitivität von Starkwindfeldern gegenüber verschiedenen meteorologischen Parametern im Mesoskalenmodell LM
- Band 40 *K. Hungershöfer*, 2007: Optical Properties of Aerosol Particles and Radiative Transfer in Connection with Biomass Burning
- Band 41 *A. Raabe* (Hrsg.), 2007: Meteorologische Arbeiten (XII) und Jahresbericht 2006 des Institutes für Meteorologie der Universität Leipzig
- Band 42 *A. Raabe* (Hrsg.), 2008: Meteorologische Arbeiten (XIII) und Jahresbericht 2007 des Institutes für Meteorologie der Universität Leipzig
- Band 43 *A. Kniffka*, 2008: Einfluss der Inhomogenitäten von Aerosol, Bodenalbedo und Wolken auf das aktinische Strahlungsfeld der Atmosphäre
- Band 44 *Manuela Barth*, 2009: Akustische Tomographie zur zeitgleichen Erfassung von Temperatur- und Strömungsfeldern